数チャレ 第14回 (2002年3月)

正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す．ただし，1 および a 自身も約数とする．たとえば $f(1)=1$ であり，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15)=24$ となる．次の問いに答えよ．

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする．このとき

$$f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$$

が成り立つことを示せ．

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする．このとき

$$f(a) \geqq (p+1)q$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ．

(3) 正の偶数 a，b は，ある整数 m，n とある奇数 r，s を用いて $a=2^m r$，$b=2^n s$ のように表すことができる．このとき a，b が

$$\begin{cases} f(a)=2b \\ f(b)=2a \end{cases}$$

をみたせば，r，s は素数であり，かつ $r=2^{m+1}-1$，$s=2^{m+1}-1$ となることを示せ．

出典：2002 年 九州大学

解答

(1)　2^m と b は互いに素であるから，a の正の約数は 2^m の正の約数 2^k と b の正の約数 d を用いて $2^k d$ と表せるから，

$$f(a)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{\substack{d\,|\,b\\ d\in\boldsymbol{N}}}2^k d=\sum_{k=0}^{m}2^k\sum_{\substack{d\,|\,b\\ d\in\boldsymbol{N}}}d=(2^{m+1}-1)f(b)$$

(おわり)

(2)　pq, q は $a=pq$ は正の約数であるから，

$$f(a)\geqq pq+q=(p+1)q$$

$f(a)=pq+q$ となるのは，$a=pq$ の正の約数が pq と q だけのときであり，$p\geqq 2$ より $q=1$ かつ p は素数となる。

(おわり)

(3)　(1)より

$$f(a)=f(2^m r)=(2^{m+1}-1)f(r)$$
$$f(b)=f(2^n s)=(2^{n+1}-1)f(s)$$

$f(a)=2b$, $f(b)=2a$ を満たせば

$$(2^{m+1}-1)f(r)=2^{n+1}s,\quad (2^{n+1}-1)f(s)=2^{m+1}r$$

$2^{m+1}-1$ と 2^{n+1} は互いに素，$2^{n+1}-1$ と 2^{m+1} は互いに素であるから，

$$\frac{f(r)}{2^{n+1}}=\frac{s}{2^{m+1}-1}=c,\quad \frac{f(s)}{2^{m+1}}=\frac{r}{2^{n+1}-1}=d$$

はともに正の奇数(整数)である。

(2)より

$$r=(2^{n+1}-1)d,\quad 2^{n+1}c=f(r)\geqq 2^{n+1}d$$
$$s=(2^{m+1}-1)c,\quad 2^{m+1}d=f(s)\geqq 2^{m+1}c$$

$c\geqq d$ かつ $d\geqq c$ より $c=d$ となり，不等式の等号成立条件より

$$c=d=1\ \text{かつ}\ r=2^{n+1}-1,\ s=2^{m+1}-1\ \text{は素数}$$

(おわり)

参考：(3)のような正の整数 a, b の組は友愛数(friendly numbers)と呼ばれる。
また，$f(a)=2a$ を満たす正の整数 a は完全数(perfect number)と呼ばれる。
偶数の完全数も本問と全く同様の議論により

$$2^n(2^{n+1}-1)\quad (n\ \text{は自然数},\ 2^{n+1}-1\ \text{は素数})$$

の形に限られることがわかる。

完全数も友愛数も奇数のものがあるかどうかについては未解決である。