数チャレ 第15回(2002年4月)

nを正の整数とする。$(a+b)^n$を二項定理によって展開した式の各項の係数がすべて奇数になるのはどのようなnか。

出典：2002年 慶応義塾大学 看護医療学部

解答

mが自然数，kが$1 \leqq k \leqq 2^m - 1$を満たす自然数であるとき，

$$_{2^m}\mathrm{C}_k \text{は偶数}$$

であることに注意する。実際，

$$_{2^m}\mathrm{C}_k = \frac{2^m}{k} \times {}_{2^m-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

は整数であり，kが偶数であるとしてもたかだか2で$m-1$回までしか割れないので，

$$\frac{2^{m-1}}{k} \times {}_{2^m-1}\mathrm{C}_{k-1} \text{は整数}, \quad {}_{2^m}\mathrm{C}_k = 2 \times \frac{2^{m-1}}{k} \times {}_{2^m-1}\mathrm{C}_{k-1} \text{は偶数}$$

である。

2つの整数$x,\ y$の偶奇が等しい(2で割った余りが等しい)ことを$x \equiv y \pmod 2$と表すことにすると，上の考察より

$$(a+b)^{2^m} \equiv a^{2^m} + b^{2^m} \pmod 2$$

が成り立つ。

自然数nを2進展開して

$$n = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \cdots + 2^{\alpha_m} \quad (0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m)$$

と表すとき，$(a+b)^n$の展開式について

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= (a+b)^{2^{\alpha_1}}(a+b)^{2^{\alpha_2}}\cdots(a+b)^{2^{\alpha_m}} \\ &\equiv \left(a^{2^{\alpha_1}} + b^{2^{\alpha_1}}\right)\left(a^{2^{\alpha_2}} + b^{2^{\alpha_2}}\right)\cdots\left(a^{2^{\alpha_m}} + b^{2^{\alpha_m}}\right) \pmod 2\end{aligned}$$

であるから，$a^k b^{n-k}$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$のうち奇数係数であるものは

$$k = 2^{\beta_1} + 2^{\beta_2} + \cdots + 2^{\beta_p}, \quad \{\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_p\} \subset \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m\}$$

と表されるkに限られる。

したがって，$(a+b)^n$の各項の係数がすべて奇数になるのは，

$$k = 2^{\beta_1} + 2^{\beta_2} + \cdots + 2^{\beta_p}, \quad \{\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_p\} \subset \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m\}$$

と表されるkがn以下のすべての自然数を掃く場合である。このとき

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m\} = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\}$$

すなわち，nは

$$n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m - 1 \ (m \text{は自然数}) \quad \text{(答)}$$

と表される自然数である。