数チャレ 第20回 (2002年9月)

(1) 奇数の平方を8で割った余りを求めよ。
(2) $m^2 = 10^n - 1$ を満たす自然数 $m,\ n$ は $m=3,\ n=1$ に限られることを示せ。
(3) 各位が同じ数字である2桁以上の自然数は平方数でないことを証明せよ。

コメント：各位が7の場合だけは(1), (2)がヒントにならないが，どうすればよいか？

解答：

(1) 奇数は $2k-1$ (k は整数)と表され，その平方は

$$(2k-1)^2 = 4k(k-1)+1$$

連続する整数の一方は偶数であるから $4k(k-1)$ は8の倍数となり，

奇数の平方を8で割った余りは1 (答)

である。

(2) 8で割った余りが等しいことを $a \equiv b \pmod 8$ で表すことにする。

自然数 $m,\ n$ が $m^2 = 10^n - 1$ を満たすとき m は奇数であるから，(1)より

$$m^2 = 10^n - 1 \equiv 1 \pmod 8$$

である。ところが，

$n=2$ のとき $10^n - 1 \equiv 2^2 - 1 \equiv 3 \pmod 8$

$n \geqq 3$ のとき $10^n - 1 \equiv 2^n - 1 \equiv -1 \pmod 8$

となるから，$n \geqq 2$ のときは成り立たない。 (おわり)

(3) 各位が a ($a = 1,\ 2,\ \cdots,\ 9$) である $n\,(\geqq 2)$ 桁の自然数は

$$a(1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}) = \frac{a(10^n-1)}{10-1} = \frac{a}{9}(10^n-1)$$

である。この値が平方数 m^2 (m は自然数)に一致するとすれば，

$$9m^2 = (3m)^2 = a(10^n-1) \qquad \cdots\cdots \ (*)$$

となるから，この式が成り立たないことを示せばよい。

(i) $a=1$ のとき，$(*)$を $(3m)^2 = 10^n - 1$ とみれば，(2)より $n \geqq 2$ では成り立たない。

(ii) $a=2$ のとき m は偶数であり，$n \geqq 2$ のとき

$$(3m)^2 \equiv 0 \text{ or } 4 \pmod 8,\quad 2(10^n-1) \equiv 2(2^n-1) \equiv 6 \pmod 8$$

となるから，$(*)$は成り立たない。

(iii) $a=3$ のとき，$3(10^2-1) = 297$ は平方数でなく，$n \geqq 3$ のとき

$$(3m)^2 \equiv 1 \pmod 8,\quad 3(10^n-1) \equiv -3 \pmod 8$$

となるから，$(*)$は成り立たない。

(iv)　$a=4$ のとき，m は偶数であるから，$(*)$を
$$\left(\frac{3m}{2}\right)^2=10^n-1$$
とみれば，(2)より $n \geqq 2$ では成り立たない。

(v)　$a=5$ のとき，m は奇数であるから $(3m)^2 \equiv 1 \pmod 8$ であり，
$$5(10^2-1) \equiv 7 \pmod 8,\quad n \geqq 3 \Rightarrow 5(10^n-1) \equiv -5 \pmod 8$$
となるから，$(*)$は成り立たない。

(vi)　$a=6$ のとき m は偶数であり，$n \geqq 2$ のとき
$$(3m)^2 \equiv 0 \text{ or } 4 \pmod 8,\quad 6(10^n-1) \equiv 6(2^n-1) \equiv 2 \pmod 8$$
となるから，$(*)$は成り立たない。

(vii)　$a=7$ のとき，8 で割った余りでは矛盾が導けないないので，5 で割った余りを考えることにすると，
$$(3m)^2 \equiv 0,\ 1,\ 4 \pmod 5,\quad 7(10^n-1) \equiv -7 \equiv 3 \pmod 5$$
となるから，$(*)$は成り立たない。

(viii)　$a=8$ のとき，m は偶数であるから，$(*)$を
$$9\left(\frac{m}{2}\right)^2=2(10^n-1)$$
とみることにより，$a=2$ のときに証明済み。

(ix)　$a=9$ のとき，(2)より $n \geqq 2$ では成り立たない。

以上により，各位が同じ数字である 2 桁以上の自然数は平方数でない。

（おわり）

(注)　平方数の 1 の位に注目すると，$a=1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9$ だけ調べれば十分である。
さらに，1000 が 8 の倍数であることに注目すると，下 3 桁だけ考えて
$$111 \equiv 7,\quad 555 \equiv 3,\quad 666 \equiv 2,\quad 999 \equiv 7 \pmod 8$$
となるから，4 以外の場合は簡単に片付く。