数チャレ 第21回 (2002年10月)

$a,\ b$ は互いに素な正の奇数であるとする。

(1)　$a+b$ と a^2+b^2 の最大公約数は 2 であることを示せ。

(2)　一般の自然数 n に対して，a^n+b^n と $a^{n+1}+b^{n+1}$ の最大公約数はどうなるか。

解答

(1)　$a^2+b^2=(a+b)(a-b)+2b^2$ と変形できることより

$$gcd(a^2+b^2,\ a+b)=gcd(a+b,\ 2b^2)$$

同様に，$a^2+b^2=(a+b)(b-a)+2a^2$ より

$$gcd(a^2+b^2,\ a+b)=gcd(a+b,\ 2a^2)$$

したがって，

$gcd(a^2+b^2,\ a+b)$ は $2a^2$ と $2b^2$ の公約数

となる。ところが，a と b は互いに素であるから

$gcd(a+b,\ a^2+b^2)$ は 2 の約数

一方，a と b はともに奇数であるから，$a+b$ と a^2+b^2 はともに偶数であり，

$gcd(a+b,\ a^2+b^2)$ は 2 の倍数

以上より

$$gcd(a+b,\ a^2+b^2)=2$$

(おわり)

〔別証〕$a+b$ と a^2+b^2 はともに偶数であることを考えて，$\dfrac{a+b}{2}$ と $\dfrac{a^2+b^2}{2}$ が共通の素因数 p をもつとすれば，

$$\frac{a^2+b^2}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

より p は $\dfrac{a-b}{2}$ も割ることになり，

p は $\dfrac{a+b}{2}$ と $\dfrac{a-b}{2}$ の共通の素因数

ということになる。すると，p は

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a,\quad \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b$$

の共通の素因数ということになり，a と b が互いに素であることに反する。

よって，

$\dfrac{a+b}{2}$ と $\dfrac{a^2+b^2}{2}$ は互いに素

となって，$a+b$ と a^2+b^2 の最大公約数は 2 である。(おわり)

(2)　$n \geqq 2$ のとき

$$a^{n+1}+b^{n+1}=(a+b)(a^n+b^n)-ab(a^{n-1}+b^{n-1})$$

と変形されることより

$$gcd(a^{n+1}+b^{n+1},\ a^n+b^n)=gcd(a^n+b^n,\ ab(a^{n-1}+b^{n-1})) \qquad \cdots\cdots ①$$

整数 s が整数 t の約数であることを $s\,|\,t$ で表すことにすると，素数 p に対して

$$\begin{aligned}
&p\,|\,a^n+b^n \text{ かつ } p\,|\,ab\\
&\Longrightarrow p\,|\,a^n+b^n \text{ かつ “ } a\,|\,p \text{ または } b\,|\,p \text{ ”}\\
&\Longrightarrow \text{“ } p\,|\,a^n+b^n \text{ かつ } p\,|\,a \text{ ” または “ } p\,|\,a^n+b^n \text{ かつ } p\,|\,b \text{ ”}\\
&\Longrightarrow \text{“ } p\,|\,b^n \text{ かつ } p\,|\,a \text{ ” または “ } p\,|\,a^n \text{ かつ } p\,|\,b \text{ ”}\\
&\Longrightarrow p\,|\,a \text{ かつ } p\,|\,b
\end{aligned}$$

であるから，a と b が互いに素であるならば，この対偶によって

$$a^n+b^n \text{ と } ab \text{ は互いに素}$$

である。したがって，

$$gcd(a^n+b^n,\ ab(a^{n-1}+b^{n-1}))=gcd(a^n+b^n,\ a^{n-1}+b^{n-1}) \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ② より，帰納的に

$$gcd(a^{n+1}+b^{n+1},\ a^n+b^n)=gcd(a^2+b^2,\ a+b)=2 \quad \text{(答)}$$

が導かれる。