

数チャレ 第22回(2002年11月)

p, q は素数で, $p < q$ とする。

- (1) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ をみたく整数 r は存在しないことを示せ。
- (2) $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ をみたく整数 p, q, r を求めよ。

出典：1999年 一橋大学(一部変更)

解答

- (1) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ をみたく整数 r が存在すると仮定する。素数の性質と

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \iff r(p+q) = pq$$

より, p, q はそれぞれ r または $p+q$ を割る。ここで, p が $p+q$ を割るとすれば, p は q の約数ということになって p と q が異なる素数であることに反するから, $p+q$ は p で割り切れない。

同様に,

$$p+q \text{ は } q \text{ で割り切れない。}$$

よって, r は p および q で割り切れる。異なる素数 p, q は当然互いに素であるから r は pq の倍数となって,

$$r = npq \quad (n \text{ は整数})$$

と表される。ところが, このとき

$$n(p+q) = 1 \text{ したがって } p+q = 1$$

となって, p, q が素数(特に2以上の整数)であることと矛盾する。

ゆえに, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ をみたく整数 r は存在しない。

(おわり)

- (2) $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \iff r(q-p) = pq$

であるから, (1)と同様の議論により

$$q-p = 1 \quad (p < q)$$

が得られる。1は特に奇数であるから p と q の偶奇は異なり, 一方は偶数の素数2となる。2は最小の素数でもあるから

$$p = 2, \quad q = 3$$

と定まり, 与えられた等式より r も求めて

$$p = 2, \quad q = 3, \quad r = 6 \quad (\text{答})$$