数チャレ 第23回(2002年12月)

自然数 n に対して，整数 $f(n)$ を次の規則で定める。

(i) $f(1)=1$

(ii) 素数 p，自然数 a に対して $f(p^a)=p^a\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$

(iii) 自然数 m，n が互いに素のとき $f(mn)=f(m)f(n)$

このとき，次のことを証明せよ。

(1) $f(n)=\dfrac{1}{3}n$ となる自然数 n は，2^a3^b (a，b は自然数) と表される。

(2) p を5以上の素数とするとき，$f(n)=\dfrac{1}{p}n$ となる自然数 n は存在しない。

解答

n の素因数分解を

$$n={p_1}^{a_1}{p_2}^{a_2}\cdots{p_r}^{a_r}\quad (a_r\text{は自然数})$$

とすると，条件(iii), (ii)より

$$\begin{aligned}f(n)&=f({p_1}^{a_1})f({p_2}^{a_2})\cdots f({p_r}^{a_r})\\&={p_1}^{a_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\times{p_2}^{a_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\times\cdots\times{p_r}^{a_r}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)\\&=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\frac{f(n)}{n}=\frac{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)}{p_1p_2\cdots p_r}$$

(1) $\dfrac{f(n)}{n}=\dfrac{1}{3}$ のとき

$$p_1p_2\cdots p_r=3(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)$$

3が素数であることより p_1，p_2，$\cdots$，p_r の中に3が含まれ，$p_1=3$ とすると

$$p_2\cdots p_r=2(p_2-1)\cdots(p_r-1)$$

同様に，$p_2=2$ とすることができて，$r\geqq 3$ とすると，

$$p_3\cdots p_r=(p_3-1)\cdots(p_r-1)$$

の左辺は奇数，右辺は偶数となって矛盾する。

よって，$r=2$ であり，

$$n=2^a3^b\ (a,\ b\text{は自然数})$$

と表される。　　　　(おわり)

(2) 5 以上のある素数 p に対して，$f(n)=\dfrac{1}{p}n$ が成り立つと仮定すると

$$p_1p_2\cdots p_r=p(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)$$

と表される。

(a) $p\equiv 1 \pmod 4$ のとき，素数 p_1，p_2，$\cdots$，p_r のいずれかは素数 p と一致するから，$p_1=p$ として一般性を失わない。このとき，

$$p_2\cdots p_r=(p-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)$$

の右辺は 4 で割り切れて，左辺は平方因数をもたないから矛盾する。

(b) $p\equiv 3 \pmod 4$ のとき

$$p-1=2q \quad (q \text{ は } 3 \text{ 以上の奇数})$$

と表されるから，(a)と同様に $p_1=p$ として

$$p_2\cdots p_r=2q(p_2-1)\cdots(p_r-1)$$

が成り立つ。この左辺は 2 以外に q の素因数を含むから

$$r\geqq 3$$

であり，$p_2=2$ とすると

$$p_3\cdots p_r=q(p_2-1)\cdots(p_r-1)$$

となって，左辺は奇数である。ところが，$r\geqq 3$ より，右辺は偶数となるから矛盾する。

ゆえに，5 以上の素数 p に対して，$f(n)=\dfrac{1}{p}n$ となる自然数 n は存在しない。

(おわり)

(注) 一見，(a)と(b)の場合分けは不要に思われるが，(a)のタイプには $17=2^4+1$ のように $p-1$ が 2 のべき(素因数が 2 だけ)である素数 p も含まれるので，(b)と同様に論じることはできない。