数チャレ 第24回(2003年1月)

$x^2+y^2+z^2=2003$ をみたす自然数 $x,\ y,\ z$ を求めよ。ただし，$x,\ y,\ z$ が入れ替わっただけの組は同一視する。

コメント：パソコンに計算させれば簡単に答が出せますが，手計算で求めるとすればどのような考察になるか，という構造を問う問題です。

解答

$$x^2+y^2+z^2=2003 \qquad \cdots\cdots ①$$

n を整数として

$$(2n)^2=4n^2,\quad (2n+1)^2=4(n^2+n)+1$$

となるから，平方数を4で割った余りは0または1である。①より

$$x^2+y^2+z^2\equiv 3 \pmod 4$$

であるから，

$x,\ y,\ z$ はすべて奇数

である。同様に

$$(3n)^2=3(3n^2),\quad (3n\pm 1)^2=3(3n^2\pm 2n)+1$$

より，平方数を3で割った余りは0または1であり，①より

$$x^2+y^2+z^2\equiv 2 \pmod 3$$

であるから，

$x,\ y,\ z$ のうち1つだけは3の倍数

となる。したがって，

$$x=6u+3,\ \ y=2v+1,\ \ z=2w+1 \quad (v\leqq w) \qquad \cdots\cdots ②$$

とおいて一般性を失わない。ただし，$u,\ v,\ w$ は0以上の整数である。

①に②を代入して

$$9(2u+1)^2+(2v+1)^2+(2w+1)^2=2003$$

$$9(4u^2+4u)+(4v^2+4v)+(4w^2+4w)=1992$$

$$\therefore\ \ 9\cdot\frac{u(u+1)}{2}+\frac{v(v+1)}{2}+\frac{w(w+1)}{2}=249 \qquad \cdots\cdots ③$$

ここで，

$$9\times\frac{6\times 7}{2}=189,\quad 9\times\frac{7\times 8}{2}=252$$

に注目すると，②より u のとり得る値は

$$u=6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0$$

である。

249 以下の三角数を列挙すると

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\dfrac{n(n+1)}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
78	91	105	120	136	153	171	190	210	231	253

となるから，u について場合分けして

(i) $u=6$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2}+\frac{w(w+1)}{2}=60\quad(v \leqq w)\qquad \therefore\ (v,\ w)=(5,\ 9)$$

(ii) $u=5$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2}+\frac{w(w+1)}{2}=114\quad(v \leqq w)\qquad \therefore\ (v,\ w)=(8,\ 12)$$

(iii) $u=4$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2}+\frac{w(w+1)}{2}=159\quad(v \leqq w)\qquad \therefore\ (v,\ w)=(3,\ 17)$$

(iv) $u=3$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2}+\frac{w(w+1)}{2}=195\quad(v \leqq w)\qquad \therefore\ v,\ w\text{ は存在しない}$$

(v) $u=2$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2}+\frac{w(w+1)}{2}=222\quad(v \leqq w)\qquad \therefore\ v,\ w\text{ は存在しない}$$

(vi) $u=1$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2}+\frac{w(w+1)}{2}=240\quad(v \leqq w)\qquad \therefore\ (v,\ w)=(15,\ 15)$$

(vii) $u=0$ のとき

$$\frac{v(v+1)}{2}+\frac{w(w+1)}{2}=249\quad(v \leqq w)\qquad \therefore\ (v,\ w)=(12,\ 18)$$

以上で得られた結果

$$(u,\ v,\ w)=(0,\ 12,\ 18),\ (1,\ 15,\ 15),\ (4,\ 3,\ 17),\ (5,\ 8,\ 12),\ (6,\ 5,\ 9)$$

を②に代入すると，

$$(x,\ y,\ z)=(3,\ 25,\ 37),\ (9,\ 31,\ 31),\ (27,\ 7,\ 35),\ (36,\ 17,\ 25),\ (39,\ 11,\ 19)$$

見やすいように辞書式順序に並べて，①を満たす自然数の組は

$$(3,\ 25,\ 37),\ (9,\ 31,\ 31),\ (7,\ 27,\ 35),\ (11,\ 19,\ 39),\ (17,\ 25,\ 36)\quad\text{(答)}$$