数チャレ 第25回(2003年2月)

(1) $x(x^2-9x+16)<(x-4)^3$ を満たす整数 x をすべて求めよ。
(2) $m^6-9m^3+16=n^3$ を満たす自然数 $m,\ n$ の組をすべて求めよ。

解答

(1) $x(x^2-9x+16)-(x-4)^3=3x^2-32x+64=(x-8)(3x-8)$

であるから,

$$x(x^2-9x+16)<(x-4)^3 \iff (x-8)(3x-8)<0$$
$$\iff \frac{8}{3}<x<8$$

この不等式を満たす整数 x は

$$x=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \quad (\text{答})$$

(2) $m>0$ であるから,両辺に m^3 をかけることにより,題意の方程式は

$$m^6-9m^3+16=n^3 \iff m^9-9m^6+16m^3=(mn)^3$$

と書き換えられる。

(1)において $x=m^3\,(\geqq 1)$ とすると

$$m^9-9m^6+16m^3>(m^3-4)^3 \iff m^3=1^3 \ \text{または}\ m^3>2^3$$

また,

$$m^9-9m^6+16m^3-(m^3-3)^3=-11m^3+27 \begin{cases} >0 & (m=1) \\ <0 & (m\geqq 2) \end{cases}$$

であるから,

$$m\geqq 3 \text{ のとき} \quad (m^3-4)^3<m^9-9m^6+16m^3<(m^3-3)^3$$

$(m^3-4)^3$ と $(m^3-3)^3$ は隣り合う立方数であるから,$m^9-9m^6+16m^3$ が立方数 $(mn)^3$ と一致するならば,

$$m=1 \text{ または } 2$$

であることが必要である。

$$m=1 \text{ のとき} \quad n^3=1^6-9\times 1^3+16=8 \qquad \therefore\ n=2$$
$$m=2 \text{ のとき} \quad n^3=2^6-9\times 2^3+16=8 \qquad \therefore\ n=2$$

以上より,$m^6-9m^3+16=n^3$ を満たす自然数 $m,\ n$ は

$$(m,\ n)=(1,\ 2),\ (2,\ 2) \quad (\text{答})$$