数チャレ 第26回(2003年3月)

pを素数とする。xに関する2次方程式

$$px^2+(5-p^2)x-3p=0$$

が整数の解をもつのは $p=2$ のときに限ることを示せ。

出典：2003年 千葉大学 理学部

証明

2次方程式の解は

$$x=\frac{p^2-5\pm\sqrt{(p^2-5)^2+12p^2}}{2p}$$

であるから，整数解をもつためには

$$(p^2-5)^2+12p^2=m^2$$

となる自然数mの存在が必要である。このとき

$$12p^2=m^2-(p^2-5)^2=(m+p^2-5)(m-p^2+5)$$

ここで，

$$(m+p^2-5)-(m-p^2+5)=2(p^2-5)\text{ は偶数}$$

であるから2数の偶奇は等しく，2数の積は偶数であるから

$$m+p^2-5,\ m-p^2+5\text{ はともに偶数}$$

である。pが3以上の素数であるとすれば，

$$3p^2=\frac{m+p^2-5}{2}\cdot\frac{m-p^2+5}{2}$$

において $p^2-5>0$であり，

$$\frac{m+p^2-5}{2}>0,\quad \frac{m+p^2-5}{2}>\frac{m-p^2+5}{2}$$

となるから，積の組合せは

$$\left(\frac{m+p^2-5}{2},\ \frac{m-p^2+5}{2}\right)=(3p^2,\ 1),\ (3p,\ p),\ (p^2,\ 3)$$

に限られる。

(i) $\dfrac{m+p^2-5}{2}=3p^2,\ \ \dfrac{m-p^2+5}{2}=1$のとき

$$3p^2-1=\frac{m+p^2-5}{2}-\frac{m-p^2+5}{2}=p^2-5$$

となるが，これは $p^2-5<p^2-1<3p^2-1$であることに反する。

(ii) $\dfrac{m+p^2-5}{2}=3p,\ \ \dfrac{m-p^2+5}{2}=p$のとき

$$3p-p=\frac{m+p^2-5}{2}-\frac{m-p^2+5}{2}=p^2-5$$

$$p^2-2p-5=0 \qquad \therefore\ p=1\pm\sqrt{6}$$

これはpが素数(整数)であることに反する。

(iii) $\dfrac{m+p^2-5}{2}=p^2,\ \dfrac{m-p^2+5}{2}=3$のとき

$$p^2-3=\frac{m+p^2-5}{2}-\frac{m-p^2+5}{2}=p^2-5$$

となるが，この等式は成り立たない。

以上より，xの方程式$px^2+(5-p^2)x-3p=0$ (pは素数)が整数解をもつのは，$p=2$のときに限られる。なお，$p=2$のとき2次方程式は

$$2x^2+x-6=0 \quad \text{すなわち} \quad (x+2)(2x-3)=0$$

となって，実際に整数解$x=-2$をもつ。 (証明おわり)

別証

整数解をnとすると

$$pn^2+(5-p^2)n-3p=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

pを含む項と含まない項に分けて

$$5n=p(-n^2+pn+3)$$

pは素数であるから

$$p=5 \quad \text{または} \quad n \text{は} p \text{の倍数}$$

(i) $p=5$のとき，$(*)$は

$$5(n^2-4n-3)=0 \qquad \therefore\ n=2\pm\sqrt{7}$$

よって，nが整数であることに反する。

(ii) nがpの倍数のとき

$$n=pq \quad (q\text{は整数})$$

と表すことができて，$(*)$より

$$p(pq)^2+(5-p^2)pq-3p$$
$$p^2q^2+(5-p^2)q-3=0 \qquad \therefore\ q(p^2q-p^2+5)=3$$

qおよびp^2q-p^2+5は整数であるから，3の約数を考えて

$$(q,\ p^2q-p^2+5)=(1,\ 3),\ (-1,\ -3),\ (3,\ 1),\ (-3,\ -1)$$

$q=1,\ p^2q-p^2+5=3$のとき，$5=3$となって矛盾。

$q=-1,\ p^2q-p^2+5=-3$のとき，$p^2=4 \qquad \therefore\ p=2$

$q=3,\ p^2q-p^2+5=1$のとき，$p^2=-2$となってpは整数とならない。

$q=-3,\ p^2q-p^2+5=-1$のとき，$2p^2=3$となってpは整数とならない。

$p=2$のとき，$(*)$は

$$2n^2+n-6=(n+2)(2n-3)=0 \qquad \therefore\ n=-2$$

以上より，$(*)$を満たす素数pと整数nは

$$p=2,\ \ n=-2$$

に限られる。 (証明おわり)