

## 数チャレ 第28回 (2003年5月)

$n$  を自然数とする。

- (1)  $n(n+2)(n+4)$  と  $(n+1)(n+3)$  の最大公約数を求めよ。  
 (2) 5つの自然数  $n, n+1, n+2, n+3, n+4$  をどのように2つに分けても積は等しくなることを示せ。

### 解答

- (1) 隣り合う自然数は互いに素であるから、

$$\begin{aligned} \gcd(n, n+1) &= 1 \\ \gcd(n+2, n+1) &= \gcd(n+2, n+3) = 1 \\ \gcd(n+4, n+3) &= 1 \end{aligned}$$

である。残りの組合せについては

$$\begin{aligned} \gcd(n, n+3) &= \begin{cases} 3 & (3|n) \\ 1 & (3 \nmid n) \end{cases} \\ \gcd(n+4, n+1) &= \begin{cases} 3 & (n \equiv 2 \pmod{3}) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned}$$

以上をまとめて

$$\gcd(n(n+2)(n+4), (n+1)(n+3)) = \begin{cases} 1 & (n \equiv 1 \pmod{3}) \\ 3 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

- (2) 適当に2つに分けると積が等しくなるとすれば、

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ は平方数}$$

となる。このとき、矛盾することを示す。

- 1°  $n(n+2)(n+4)$  と  $(n+1)(n+3)$  が互いに素であるとき、いずれも平方数となるから、特に

$$(n+1)(n+3) = m^2$$

を満たす正の整数  $m$  が存在する。ところが、

$$\begin{aligned} (n+1)(n+3) = m^2 &\iff (n+2)^2 - 1 = m^2 \\ &\iff (n+2)^2 - m^2 = 1 \\ &\iff (n+m+2)(n-m+2) = 1 \\ &\iff n+m+2 = n-m+2 = \pm 1 \\ &\iff n+2 = \pm 1 \text{ かつ } m = 0 \end{aligned}$$

となるから、 $m > 0$  に反する。

- 2°  $\gcd(n(n+2)(n+4), (n+1)(n+3)) = 3$  のとき

$$n(n+2)(n+4) = 3s^2, \quad (n+1)(n+3) = 3t^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす正の整数  $s, t$  が存在する。

$$(n+2)\{(n+2)^2 - 2^2\} = 3s^2, \quad (n+2)^2 - 1^2 = 3t^2$$

より  $n+2$  を消去して,

$$(3t^2 + 1)(3t^2 + 1 - 4)^2 = (3s^2)^2$$

$$\therefore (3t^2 + 1)(t^2 - 1)^2 = s^4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(i)  $t$  が偶数のとき

$$3t^2 + 1 = 3(t^2 - 1) + 4$$

より  $3t^2 + 1, t^2 - 1$  は互いに素な奇数であるから, ②より

$$3t^2 + 1 = k^4, \quad (t^2 - 1)^2 = l^4$$

を満たす正の整数  $k, l$  が存在する。特に,  $(t^2 - 1)^2 = l^4$  より

$$t^2 - 1 = l^2$$

$$t^2 - l^2 = (t+l)(t-l) = 1 \quad (t+l > 0)$$

$$\therefore t+l = t-l = 1$$

このとき  $l = 0$  となって,  $l$  が正の整数であることに反する。

(ii)  $t$  が奇数のとき

①より  $n+1, n+3$  は互いに素な奇数であり, 正の奇数  $a, b, c, d$  を用いて

$$(n+1, n+3) = (a^2, 3b^2) \text{ または } (3c^2, d^2)$$

と表される。  $a, b, c, d$  は奇数であるから

$$a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv d^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

であり, 実際に成り立ち得るのは

$$n+1 = a^2, \quad n+3 = 3b^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

の場合に限られる。特に,  $n = 3(b^2 - 1), b^2 \equiv 1 \pmod{4}, \gcd(3, 4) = 1$  より

$$n = 12m \quad (m \text{ は正の整数}) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

と表されるから, ①より

$$12m(12m+2)(12m+4) = 3s^2$$

$$\therefore m(6m+1)(6m+2) = \left(\frac{s}{4}\right)^2 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

ここで,

$$\gcd(m, 6m+1) = \gcd(6m+1, 6m+2) = 1$$

であり,  $(6m+2) - 6m = 2$  より  $\gcd(6m, 6m+2) = 1$  または  $2$  であるから

$$\gcd(m, 6m+2) = 1 \text{ または } 2$$

である。

$\gcd(m, 6m+2) = 1$  のとき, ⑤より

$$m = u^2, \quad 6m+1 = v^2, \quad 6m+2 = w^2 \quad (u, v, w \text{ は正の整数})$$

と表されるから,

$$w^2 - v^2 = (6m+2) - (6m+1) = 1$$

$$(w+v)(w-v) = 1 \quad (w+v > 0)$$

$$\therefore w+v = w-v = 1$$

このとき  $v = 0$  となって, 正の整数であることに反する。

$\gcd(m, 6m+2) = 2$  のとき, ⑤より

$$m = 2u^2, \quad 6m+1 = v^2, \quad 6m+2 = 2w^2 \quad (u, v, w \text{ は正の整数})$$

と表され, ③, ④より

$$12m+1 = a^2$$

であるから,

$$4w^2 - a^2 = (12m+4) - (12m+1) = 3$$

$$(2w+a)(2w-a) = 3 \quad (2w+a > 0)$$

$$\therefore 2w+a = 3, \quad 2w-a = 1$$

$$\therefore w = a = 1$$

このとき  $m = 0$  となり,  $m$  が正の整数であることに反する。

以上より, 5つの自然数  $n, n+1, n+2, n+3, n+4$  をどのように2つに分けても積は等しくならない。

(おわり)