数チャレ 第29回 (2003年6月)

$a,\ b$ を正の整数とする。

(1) n を2以上の整数，k を $1 \leqq k \leqq n-1$ なる整数とするとき，

$$a^n + b^n \text{ が } a^k\, b^{n-k} \text{ で割り切れるならば } a = b$$

であることを示せ。

(2) n を3以上の整数，k を $1 \leqq k \leqq n-2$ なる整数とするとき，

$$a^n + b^n \text{ は } a^k\, b^{n-k-1} \text{ で割り切れるが } a \neq b$$

であるような $(a,\ b)$ の組は無数に存在することを示せ。

解答

(1) $a^n + b^n$ が $a^k\, b^{n-k}$ で割り切れるとすれば，

$$a^n + b^n = m\, a^k\, b^{n-k} \quad (m \text{ は正の整数})$$

と表される。$gcd(a,\ b) = d$ とおくと，

$$\left(\frac{a}{d}\right)^n + \left(\frac{b}{d}\right)^n = m\left(\frac{a}{d}\right)^k \left(\frac{b}{d}\right)^{n-k}$$

$$\therefore\ \left(\frac{b}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{d}\right)^k \left(m\left(\frac{b}{d}\right)^{n-k} - \left(\frac{a}{d}\right)^{n-k}\right)$$

$\left(\dfrac{b}{d}\right)^n$ は $\dfrac{a}{d}$ の倍数であるが，$\dfrac{a}{d}$ と $\dfrac{b}{d}$ は互いに素であるから，

$$\frac{a}{d} = 1$$

a と b の役割を交換して考えれば，同様に

$$\frac{b}{d} = 1 \qquad \therefore\ a = b = d$$

(おわり)

(2) p を任意の素数として $a = p^{k+1},\ b = p^k$ とすると，

$$a^k b^{n-k-1} = p^{k(k+1)+k(n-k-1)} = p^{kn}$$

は a^n も b^n も割るから，$a^n + b^n$ は $a^k b^{n-k-1}$ で割り切れるが $a \neq b$ である。

素数 p は無数にあるから，$(a,\ b) = (p^{k+1},\ p^k)$ も無数にある。

(おわり)

(注)

1° 一見，(1)の仮定は強すぎるように思えるが，それが実質的な限界であることを(2)は示している。

2° 素数が無数にあることは有名であり，(2)ではその証明を省略しているが，例えば次のようにして示すことができる。

素数が $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ (有限個)しかないとすれば，$q = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ は $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ のいずれとも互いに素であるから，q の素因数は $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ 以外の素数となって矛盾する。