数チャレ 第30回(2003年7月)

6つの整数 $a,\ b,\ c,\ a+b,\ b+c,\ c+a$ を適当に並べ替えると，連続する6つの整数となる。ただし，$a<b<c$ とする。

(1) $a,\ b,\ c$ が正の整数のとき，$(a,\ b,\ c)$ の組をすべて求めよ。

(2) 整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

解答

(1) $0<a<b<c$ より，大小関係が

$$a<b<\left\{\begin{matrix} c \\ a+b \end{matrix}\right\}<c+a<b+c$$

と定まるから，連続する6整数になるとすれば

$$b-a=1 \text{ かつ } (c+a)-a=c=4$$

となり，$1 \leqq a<b<4$ より次に2つの場合が考えられる。

(i) $a=1,\ b=2,\ c=4$ のとき

$$a+b=3,\ c+a=5,\ b+c=6 \text{ となって十分}$$

(ii) $a=2,\ b=3,\ c=4$ のとき

$$a+b=5,\ c+a=6,\ b+c=7 \text{ となって十分}$$

以上より

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 4),\ (2,\ 3,\ 4) \quad \text{(答)}$$

(2) まず，$c \neq c+a,\ a \neq a+b,\ b \neq b+c$ より

$$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

1° $0<a<b<c$ のとき，(1)より

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 4),\ (2,\ 3,\ 4)$$

2° $a<0<b<c$ のとき

$$a<a+b<\left\{\begin{matrix} b \\ c+a \end{matrix}\right\}<c<b+c$$

であるから，連続する6整数になるとすれば

$$(a+b)-a=b=1 \text{ かつ } (b+c)-(a+b)=c-a=4$$

(i) $a=-2,\ b=1,\ c=2$ のとき

$$a+b=-1,\ c+a=0,\ b+c=3 \text{ となって十分}$$

(ii) $a=-1,\ b=1,\ c=3$ のとき

$$a+b=0,\ c+a=2,\ b+c=4 \text{ となって十分}$$

よって，

$$(a,\ b,\ c)=(-2,\ 1,\ 2),\ (-1,\ 1,\ 3)$$

3°　$a < b < 0 < c$ のとき

$$-c < 0 < -b < -a$$

であるから，2° より

$$(-c,\ -b,\ -a) = (-2,\ 1,\ 2),\ (-1,\ 1,\ 3)$$

$$\therefore\ (a,\ b,\ c) = (-2,\ -1,\ 2),\ (-3,\ -1,\ 1)$$

4°　$a < b < c < 0$ のとき

$$0 < -c < -b < -a$$

であるから，(1)より

$$(-c,\ -b,\ -a) = (1,\ 2,\ 4),\ (2,\ 3,\ 4)$$

$$\therefore\ (a,\ b,\ c) = (-4,\ -2,\ -1),\ (-4,\ -3,\ -2)$$

以上より，条件を満たす整数の組は

$$\begin{aligned}(a,\ b,\ c) = {} & (1,\ 2,\ 4),\ (2,\ 3,\ 4),\ (-2,\ 1,\ 2),\ (-1,\ 1,\ 3) \\ & (-2,\ -1,\ 2),\ (-3,\ -1,\ 1),\ (-4,\ -2,\ -1), \\ & (-4,\ -3,\ -2)\end{aligned}$$

(答)