数チャレ 第31回 (2003年8月)

任意の隣り合う四角数の間に三角数が存在することを示せ。ここで，四角数とは平方数のことであり，三角数とはある数以下のすべての自然数の総和として表される数のことである。

コメント：三角数と四角数が一致する場合もありますが，それでもその隣りの四角数との間に三角数は必ず存在します。

解答

奇数は2ごとに分布し，$2 = \sqrt{4} < \sqrt{8}$ であるから，任意の自然数 n に対して

$$\sqrt{8}\,n < 2m+1 < \sqrt{8}\,(n+1)$$

を満たす自然数 m が存在する。(ここで，$\sqrt{8}$ および $\sqrt{8}$ の整数倍は無理数であるから，奇数(有理数)と一致することはない。) このとき

$$8n^2 < (2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 < 8(n+1)^2$$
$$8n^2 \leqq 4m^2+4m < 8(n+1)^2$$
$$\therefore\ \ n^2 \leqq \frac{m(m+1)}{2} < (n+1)^2$$

以下，$n^2 = \dfrac{m(m+1)}{2}$ のときを考える。$\dfrac{m(m+1)}{2}$ の次の三角数が n^2 と $(n+1)^2$ の間にあることが示されれば，証明は完結する。

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - \frac{(m+1)(m+2)}{2} &= \frac{2(n+1)^2-(m+1)(m+2)}{2}\\ &= \frac{2n^2+4n-m^2-3m}{2}\\ &= \frac{m(m+1)+4n-m^2-3m}{2}\\ &= 2n-m\\ &= 2\sqrt{\frac{m(m+1)}{2}}-m\\ &> 2\sqrt{\frac{m^2}{2}}-m\\ &= (\sqrt{2}-1)m > 0\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$n^2 < \frac{(m+1)(m+2)}{2} < (n+1)^2$$

ゆえに，任意の隣り合う四角数の間に三角数が存在する。

(証明おわり)