数チャレ 第32回(2003年9月)

数列$\{a_n\}$を漸化式

$$a_1 = 3,\quad a_{n+1} = {a_n}^2 - 2$$

によって定める。このとき，任意の異なる自然数m，nに対して，a_mとa_nは互いに素な整数であることを示せ。

解答

$a_1 = 3$であり，a_nが奇数ならば$a_{n+1} = {a_n}^2 - 2$も奇数であるから，

任意の自然数nに対して，a_nは奇数

である。

与えられた漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= {a_n}^2 - 2 \\ a_{n+2} &= {a_{n+1}}^2 - 2 \\ &= ({a_n}^2 - 2)^2 - 2 \\ &= {a_n}^4 - 4{a_n}^2 + 2 \\ &= a_n({a_n}^3 - 4a_n) + 2 \end{aligned}$$

$a_{n+k} = a_n q_k + 2$ (q_nは整数)と表されるとすれば，

$$\begin{aligned} a_{n+k+1} &= {a_{n+k}}^2 - 2 \\ &= (a_n q_k + 2)^2 - 2 \\ &= {a_n}^2 {q_k}^2 + 4 a_n q_k + 2 \end{aligned}$$

ここで，$q_{k+1} = a_n {q_k}^2 + 4q_k$とおくと，$q_{k+1}$も整数であり，

$$a_{n+k+1} = a_n q_{k+1} + 2$$

以上より，$m > n$のとき，整数q_{m-n}を用いて

$$a_m = \begin{cases} a_n q_{m-n} - 2 & (m = n+1) \\ a_n q_{m-n} + 2 & (m \geqq n+2) \end{cases}$$

と表されるから，互除法の原理により

$$gcd(a_m,\ a_n) = gcd(a_n,\ 2) = 2 \text{ or } 1$$

ところが，a_nは奇数であるから

$$gcd(a_m,\ a_n) = 1$$

すなわち，a_mとa_nは互いに素である。$m < n$の場合も同様である。　(おわり)