# 数チャレ 第33回(2003年10月)

任意の自然数$n$に対して，連続する$2n+1$個の自然数$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{2n+1}$で

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}=a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{2n+1}$$

を満たすものがただ1組存在することを示し，

$$A_n=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2n+1}\}$$

を求めよ。

また，$n$と$m$を異なる自然数とするとき，$A_n$と$A_m$の両方に属する自然数は存在しないことを示せ。

## 解答

$a_1=a$とおくと，

$$a_{n+1}=a+n,\quad a_{n+2}=a+n+1,\quad a_{2n+1}=a+2n$$

であり，等差数列の和の公式より

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}=\frac{n+1}{2}(a_1+a_{n+1})=\frac{n+1}{2}(2a+n)$$

$$a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{2n+1}=\frac{n}{2}(a_{n+2}+a_{2n+1})=\frac{n}{2}(2a+3n+1)$$

であるから，両者が等しいとき

$$(n+1)(2a+n)=n(2a+3n+1)$$

ここで，$n+1$と$n$は互いに素であるから，

$$2a+n=nk,\quad 2a+3n+1=(n+1)k$$

を満たす自然数$k$が存在することが必要である。この2式を$a,\ k$についての連立方程式として解くと

$$k=2n+1,\quad a=n^2$$

となり，任意の$n$に対して初項$a$が定まるから，条件を満たす自然数の組$A_n$はただ1組存在する。このとき，

$$A_n=\{n^2,\ n^2+1,\ n^2+2,\ \cdots,\ n^2+2n\}\quad (\text{答})$$

である。

自然数$m$に対しても

$$A_m=\{m^2,\ m^2+1,\ m^2+2,\ \cdots,\ m^2+2m\}$$

と一意に定まり，

$$n<m \Longrightarrow n^2+2n<n^2+2n+1=(n+1)^2\leqq m^2$$

$$n>m \Longrightarrow m^2+2m<m^2+2m+1=(m+1)^2\leqq n^2$$

であるから，

$$n\neq m \Longrightarrow A_n\cap A_m=\phi$$

(おわり)

(注) 結局，自然数全体の集合は$\{A_n\}$の disjoint union となる：

$$1+2=3,\quad 4+5+6=7+8,\quad 9+10+11+12=13+14+15,\quad \cdots\cdots$$