数チャレ 第34回 (2003年11月)

$P(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 6x + 1$ とする。

(1) $\dfrac{P(x)}{x^2}$ を $x + \dfrac{1}{x}$ で表せ。

(2) 整数 n に対して，$P(n)$ を 4 で割った余りを求めよ。

解答

(1)
$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{x^2} &= x^2 - 6x + 12 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\\ &= x^2 + \frac{1}{x^2} - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12\\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x\cdot\frac{1}{x} - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12\\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) (1) の結果より
$$\begin{aligned}P(n) &= n^2\left\{\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - 6\left(n + \frac{1}{n}\right) + 10\right\}\\ &= n^2\left\{\left(n + \frac{1}{n} - 3\right)^2 + 1\right\}\\ &= (n^2 - 3n + 1)^2 + n^2 \quad (n = 0 \text{ のときも成立})\end{aligned}$$

連続する整数の積は偶数であるから，
$$n^2 - 3n + 1 = (n - 1)(n - 2) - 1$$
は n によらず奇数である。m を整数として，奇数 $2m - 1$ の平方は
$$(2m - 1)^2 = 4m(m - 1) + 1$$
であり，偶数の平方は 4 の倍数であるから，

$$P(n) \text{ を } 4 \text{ で割った余りは } \begin{cases} 2 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \qquad (\text{答})$$