数チャレ 第35回(2003年12月)

すべての辺の長さが整数である直角三角形において，斜辺の長さが素数pの平方，内接円の半径rが素数であるとき，素数の組$(p,\ r)$をすべて求めよ。

解答

直角をはさむ2辺の長さを$m+r,\ n+r$とおくと，mとnは整数であり，円の外部の点から円に引いた接線の長さは等しいから，

$$(\text{斜辺の長さ})=p^2=m+n$$

ピタゴラスの定理(三平方の定理)より

$$(m+n)^2=(m+r)^2+(n+r)^2$$
$$2mn=2mr+2nr+2r^2$$
$$mn=mr+nr+r^2$$
$$\therefore\ (m-r)(n-r)=2r^2$$

rは素数で$m>r$，$n>r$であるから，$m\geqq n$とすると

$$(m-r,\ n-r)=(2r,\ r),\ (r^2,\ 2),\ (2r^2,\ 1)$$

(i) $m-r=2r,\ n-r=r$ のとき

$$p^2=m+n=(2r+r)+(r+r)=5r$$

pは素数であるから，

$$p=r=5$$

(ii) $m-r=r^2,\ n-r=2$ のとき

$$p^2=(r^2+r)+(2+r)=(r+1)^2+1$$
$$p^2-(r+1)^2=1$$
$$(p+r+1)(p-r-1)=1$$

このとき，$2p=\pm1$，$r+1=0$となって不適。

(iii) $m-r=2r^2,\ n-r=1$ のとき

$$p^2=(2r^2+r)+(r+1)=r^2+(r+1)^2$$
$$p^2-(r+1)^2=r^2$$
$$\therefore\ (p+r+1)(p-r-1)=r^2$$

$p+r+1>0,\ p+r+1>p-r-1$であり，rは素数であるから，

$$p+r+1=r^2,\quad p-r-1=1$$

pを消去すると $2(r+1)=r^2-1$ となって，

$$r^2-2r-3=0$$
$$(r+1)(r-3)=0$$

rは素数であるから，

$$r=3,\quad p=r+2=5$$

以上より，求める素数の組$(p,\ r)$は

$$(p,\ r)=(5,\ 5),\ (5,\ 3)\quad (\text{答})$$