数チャレ 第36回(2004年1月)

$x^2+y^2=2004$ を満たす整数 $x,\ y$ は存在しないことを示せ。

解答

a を整数として

$$(2a)^2=4a^2,\quad (2a+1)^2=4a(a+1)+1$$

であるから，偶数の平方は4の倍数，奇数の平方を4で割ると1余ることに注意する。

$x^2+y^2=2004$ を満たす整数 $x,\ y$ が存在するとすれば，

$$x^2\equiv 0,\ 1\ (\mathrm{mod}\ 4),\quad y^2\equiv 0,\ 1\ (\mathrm{mod}\ 4),\quad x^2+y^2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$$

より $x,\ y$ はともに偶数であり，

$$x=2m,\ y=2n\quad (m,\ n\text{は整数})$$

と表すことにすると，$x^2+y^2=2004$ より

$$m^2+n^2=501$$

b を整数として

$$(3b)^2=3(3b^2),\quad (3b\pm 1)^2=3(3b^2\pm 2b)+1$$

となるから，

$$m^2\equiv 0,\ 1\ (\mathrm{mod}\ 3),\quad n^2\equiv 0,\ 1\ (\mathrm{mod}\ 3),\quad m^2+n^2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$$

より，$m,\ n$ はともに3の倍数となる。

ところが，このとき $m^2,\ n^2$ および m^2+n^2 は9の倍数となり，$501(=3\times 167)$ は9で割り切れないから，$m^2+n^2=501$ が成り立つことに矛盾する。

よって，

$$x^2+y^2=2004\text{ を満たす整数 }x,\ y\text{ は存在しない。}$$

(おわり)