数チャレ 第37回(2004年2月)

aを整数定数とする。xの2次方程式

$$x^2-(2a-5)x+2a^2-5a-3=0$$

の2解がともに整数となるようなaの値を求めよ。

コメント：2004年のセンター試験の問題を解いた人ならピンときますね。

解答

xの2次方程式

$$x^2-(2a-5)x+2a^2-5a-3=0 \qquad \cdots\cdots \ (*)$$

の2解がともに整数であるから，

$$(\text{判別式})=(2a-5)^2-4(2a^2-5a-3)=-4a^2+37$$

が平方数になることが必要であり，

$$-4a^2+37=b^2 \quad (b\text{は0以上の整数})$$

と表される。$b^2 \geqq 0$より

$$a^2 \leqq \frac{37}{4}=9+\frac{1}{4}$$

aは整数であるから，

$$a=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$$

$37-4a^2$が平方数b^2になり得るのは，

$$a=\pm 3$$

のときである。

$a=3$のとき

$(*)$は$x^2-x=0$，2解は$x=0,\ 1$

$a=-3$のとき

$(*)$は$x^2+11x+30=0$，2解は$x=-5,\ -6$

となって十分である。

よって，求めるaの値は

$$a=\pm 3 \quad (\text{答})$$

(注) 整数係数2次方程式において

「2解が整数」$\underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}}$「2解が有理数」$\Longleftrightarrow$「判別式が平方数」