数チャレ 第38回(2004年3月)

mは3以上の整数，αは

$$\cos\alpha=\frac{1}{m},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

を満たす実数とする。

(1) $a_n=m^n\cos n\alpha\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とするとき，$a_n$は整数であることを示せ。

(2) $\dfrac{\alpha}{\pi}$は無理数であることを示せ。

コメント：mが2^k(kは2以上の整数)であるか，奇数の素因数をもつかで場合分けします。

解答

(1) 加法定理と仮定より

$$\cos(n+1)\alpha+\cos(n-1)\alpha=2\cos n\alpha\cos\alpha=\frac{2}{m}\cos n\alpha$$

両辺にm^{n+1}をかけると，漸化式

$$a_{n+1}+m^2a_{n-1}=2a_n \qquad \cdots\cdots ①$$

が得られる。

$$a_1=m\cos\alpha=1$$

であり，2倍角の公式より

$$a_2=m^2(2\cos^2\alpha-1)=2-m^2$$

a_{n-1}，a_nが整数であるとすれば，①よりa_{n+1}も整数となるから，

すべての自然数nに対してa_nは整数である。 (おわり)

(2) $\dfrac{\alpha}{\pi}$が有理数であるとすれば，ある自然数Nに対して$\dfrac{N\alpha}{\pi}$は整数となる。

このとき，$\cos N\alpha=\pm1$，$N\geqq 2$であり，

$$a_N=\pm m^N \qquad \cdots\cdots ②$$

(i) $m=2^k$ (kは2以上の整数)のとき

$$a_1=1,\quad a_2=2-2^{2k}=2(1-2^{2k-1})\quad (2k-1\geqq 3)$$

$a_{n-1}=2^{n-2}b_{n-1}$，$a_n=2^{n-1}b_n$ (b_{n-1}，b_nは奇数)と表されるとすれば，①より

$$a_{n+1}=2a_n-2^{2k}a_{n-1}=2^n(b_n-2^{2k-2}b_{n-1})$$

であるから，$b_{n+1}=b_n-2^{2k-2}b_{n-1}$ $(2k-2\geqq 2)$とおくと

$$a_{n+1}=2^nb_{n+1}\quad (b_{n+1}\text{は奇数})$$

と表される。よって，

$$a_N=2^{N-1}b_N\quad (b_N\text{は奇数})$$

と表される。ところが，②より

$$a_N=\pm 2^{2kN}$$

であるから，矛盾する。

(ii) mが3以上の奇数の素因数pをもつとき

2とpは互いに素であるから，①より

$$n \geqq 2 \text{のとき} \quad p \,\big|\, a_{n+1} \Longrightarrow p \,\big|\, a_n$$

となって，②が成り立つならばa_2はpの倍数となる。ところが，$a_2 = 2 - m^2$はpで割り切れないから，矛盾する。

以上より，$\dfrac{\alpha}{\pi}$は無理数である。

(おわり)