

## 数チャレ 第39回 (2004年4月)

数列  $\{a_n\}$  を  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  と関係式

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき, 次の問に答えよ。

- (1)  $a_n < a_{n+1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを証明せよ。
- (2)  $a_{n+1}^2 + 1 = a_n a_{n+2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを証明せよ。
- (3)  $x^2 + 1$  が  $y$  で割り切れ, かつ  $y^2 + 1$  が  $x$  で割り切れるような正の整数の組  $(x, y)$  は無限個存在することを証明せよ。

出典: 2004年 横浜国立大学 経済学部

### 解答

- (1)  $0 < a_n < a_{n+1}$  が成り立つことを,  $n$  についての数学的帰納法で示す。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2$$

より  $n = 1$  のときは成り立つ。

$0 < a_k < a_{k+1}$  が成り立つとすれば, 与えられた漸化式より

$$a_{k+2} - a_{k+1} = 2a_{k+1} - a_k > 2a_k - a_k = a_k > 0$$

$$\therefore a_{k+2} > a_{k+1} \quad (> 0) \quad (\text{証明おわり})$$

- (2) 与えられた漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+1}a_{n+3} - a_{n+2}^2 &= a_{n+1}(3a_{n+2} - a_{n+1}) - a_{n+2}(3a_{n+1} - a_n) \\ &= a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 \end{aligned}$$

よって,  $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2$  は定数であるから

$$\begin{aligned} a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 &= a_1 a_3 - a_2^2 \\ &= a_1(3a_2 - a_1^2) - a_2^2 \\ &= 1 \times (3 \times 2 - 1^2) - 2^2 = 1 \end{aligned} \quad (\text{証明おわり})$$

(注) 漸化式を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_{n+3} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$$

この両辺の行列式をとると, 直ちに

$$a_{n+1}a_{n+3} - a_{n+2}^2 = a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2$$

が得られる。

(3) 数学的帰納法により, すべての自然数  $n$  に対して  $a_n$  が整数であることが示され,  
(2)より

$$\begin{cases} a_n^2 + 1 = a_{n-1}a_{n+1} \\ a_{n+1}^2 + 1 = a_n a_{n+2} \end{cases}$$

であるから,  $a_n^2 + 1$  は  $a_{n+1}$  で割り切れ,  $a_{n+1}^2 + 1$  は  $a_n$  で割り切れる。

(1)より

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

であるから,  $x^2 + 1$  が  $y$  で割り切れ,  $y^2 + 1$  が  $x$  で割り切れるような正の整数の組  $(x, y)$  は無数に存在する。 (証明おわり)