数チャレ 第40回(2004年5月)

(1) $\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\left\{\dfrac{1}{2}n(n-1)\right\}^2$ を計算せよ。

(2) 連続する立方数の和 S が偶数ならば，S は 4 で割り切れることを示せ。なお，立方数とは，ある整数の 3 乗で表される数のことである。

解答

(1)
$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\left\{\frac{1}{2}n(n-1)\right\}^2&=\frac{1}{4}n^2\{(n+1)^2-(n-1)^2\}\\&=\frac{1}{4}n^2\cdot 4n\\&=n^3\quad(\text{答})\end{aligned}$$

(2) $S=n^3+(n+1)^3+(n+2)^3+\cdots+(n+m)^3$ (m は自然数)とすると，(1)より

$$\begin{aligned}n^3&=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\left\{\frac{1}{2}n(n-1)\right\}^2\\(n+1)^3&=\left\{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right\}^2-\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2\\(n+2)^3&=\left\{\frac{1}{2}(n+2)(n+3)\right\}^2-\left\{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right\}^2\\&\vdots\\+)\quad(n+m)^3&=\left\{\frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)\right\}^2-\left\{\frac{1}{2}(n+m-1)(n+m)\right\}^2\\\hline S&=\left\{\frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)\right\}^2-\left\{\frac{1}{2}n(n-1)\right\}^2\end{aligned}$$

S が偶数であるとすれば，$\left\{\dfrac{1}{2}(n+m)(n+m+1)\right\}^2$，$\left\{\dfrac{1}{2}(n+m-1)(n+m)\right\}^2$ はともに偶数，またはともに奇数であり，

$$S=(\text{偶数})^2-(\text{偶数})^2\quad\text{または}\quad S=(\text{奇数})^2-(\text{奇数})^2$$

の形をしている。

一方，任意の偶数の平方は 4 の倍数であり，任意の奇数の平方は

$$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$$

より 4 で割ると 1 余る整数であるから，

S は 4 で割り切れる。

(おわり)