# 数チャレ 第41回 (2004年6月)

不等式 $x^2-2ax+4<0$ を満たす整数 $x$ がただ1つ存在するような実数 $a$ の範囲を求めよ。

## 解答

$$f(x)=x^2-2ax+4=(x-a)^2-a^2+4$$

とおく。必要条件として $f(x)<0$ となる実数 $x$ が存在するから，

$$-a^2+4<0 \qquad \therefore\ a<-2\ \text{または}\ a>2$$

(i) $a<-2$ のとき

$$f(-2)=4(2+a)<0$$

であるから，ただ1つの整数解は $x=-2$ であり，条件は

$$f(-1)=2a+5\geqq 0\ \ \text{かつ}\ \ f(-3)=6a+13\geqq 0$$

$$\therefore\ -\frac{13}{6}\leqq a<-2$$

(ii) $a>2$ のとき

$$f(2)=4(2-a)<0$$

であるから，ただ1つの整数解は $x=2$ であり，条件は

$$f(1)=-2a+5\geqq 0\ \ \text{かつ}\ \ f(3)=-6a+13\geqq 0$$

$$\therefore\ 2<a\leqq\frac{13}{6}$$

以上より，求める $a$ の範囲は

$$-\frac{13}{6}\leqq a<-2\ \ \text{または}\ \ 2<a\leqq\frac{13}{6}\quad (\text{答})$$