数チャレ 第42回(2004年7月)

nを自然数とする。

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$が3の倍数となるnを求めよ。

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=3m^2$ (mは自然数)と表せないことを示せ。

解答

(1) 平方数を3で割った余りに注目すると，kを整数として

$$(3k)^2=3(3k^2),\quad (3k\pm 1)^2=3(3k^2\pm 2k)+1$$

と表されるから，数列$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots$ について

3で割った余りは$1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ \cdots$ とくり返す

ことがわかる。

よって，$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$が3の倍数となるnは

9で割ると余りが$4,\ 8,\ 0$のいずれかとなる数 (答)

である。

(2) 和の公式より

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

この値が$3m^2$ (mは自然数)と表されるとすれば，

$$n(n+1)(2n+1)=18m^2=2(3m)^2$$

$n,\ n+1,\ 2n+1=2(n+1)-1$はどの2つも互いに素であるから，

(i) $n=a^2,\quad n+1=b^2,\quad 2n+1=2c^2$

(ii) $n=a^2,\quad n+1=2b^2,\quad 2n+1=c^2$

(iii) $n=2a^2,\quad n+1=b^2,\quad 2n+1=c^2$

のいずれかの形に分解される。ただし，$a,\ b,\ c$は自然数である。

(i) $b^2-a^2=(n+1)-n$より

$$(b+a)(b-a)=1$$

であるから，

$$b+a=b-a=\pm 1 \qquad \therefore\ a=0,\ b=\pm 1$$

よって，aが自然数であることに反する。

(ii) $c^2=2(n+1)-1=2(2b^2)-1$より

$$1=4b^2-c^2=(2b+c)(2b-c)$$

(i)と同様に$c=0$となって矛盾する。

(iii) $c^2=2(2a^2)+1$より

$$1=c^2-4a^2=(c+2a)(c-2a)$$

(i)と同様に$a=0$となって矛盾する。

以上より，$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=3m^2$を満たす自然数$n,\ m$は存在しない。

(おわり)