数チャレ 第43回 (2004年8月)

2以上の整数 $a,\ b$ が互いに素であるとき，$ab+1$ 以上の任意の整数 z に対して，

$$z = am + bn$$

を満たす正の整数 $m,\ n$ が存在することを証明せよ。

解答

必要ならば，a と b を入れかえて考えることにより，

$$a > b$$

の場合だけ証明すれば十分である。

$1 \leqq c < b$ なる整数 c に対して，

$$\begin{aligned} ab + c &= a(b-1) + a + c \\ &= a(b-2) + 2a + c \\ &\ \ \vdots \\ &= a\cdot 1 + (b-1)a + c \end{aligned}$$

のように b 通りに表される。ここで，a と b が互いに素であることより，b 個の数

$$c,\ a+c,\ 2a+c,\ \cdots,\ (b-1)a+c$$

はどの2つも b で割った余りは異なるから，

$$ka + c = bp \quad (0 \leqq k \leqq b-1)$$

と表されるような整数 k と正の整数 p が存在する。このとき，

$$b - k = m$$

は正の整数であり，$c = 1,\ 2,\ \cdots,\ b-1$ に対しては

$$ab + c = am + bp \quad (m,\ p \text{ は正の整数})$$

と表される。

$ab+1$ 以上の任意の整数 z に対して，

$$z - bq = ab + c = am + bp$$

を満たす非負整数 q が存在するから，$n = p + q$ とおけば

$$z = am + bn,\quad n = p + q \geqq p > 0$$

と表される。

(証明おわり)

(注) $ab = am + bn$ ($m,\ n$ は正の整数)とおくと

$$a(b-m) = bn$$

と表され，a と b が互いの素であることより

$$b - m = bk \text{ かつ } n = ak \geqq 1$$

を満たす整数 k が存在する。ところが，このとき

$$1 - k \geqq 1 \text{ かつ } k \geqq 1$$

となって矛盾するから，$ab = am + bn$ を満たす正の整数 $m,\ n$ は存在しない。

したがって，$ab+1$ は題意の条件を満たす限界の値である。