

## 数チャレ 第44回 (2004年9月)

$a, b, c, d, m, n$  は正の整数であり,  $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$  を満たすとする。

(1)  $\frac{b}{a} < \frac{mb+nd}{ma+nc} < \frac{d}{c}$  が成り立つことを示せ。

(2)  $\frac{d}{c} - \frac{b}{a} = \frac{1}{ac}$  を満たし,  $m$  と  $n$  は互いに素であるとき,  $ma+nc$  と  $mb+nd$  は互いに素であることを示せ。

コメント : (1)の証明では, 整数の条件は使いません。

### 解答

(1)  $a > 0, c > 0$  より

$$\frac{b}{a} < \frac{d}{c} \iff ad - bc > 0$$

であることに注意する。  $a(ma+nc) > 0, c(ma+nc) > 0$  も考えて

$$\frac{mb+nd}{ma+nc} - \frac{b}{a} = \frac{(mb+nd)a - (ma+nc)b}{(ma+nc)a} = \frac{n(ad-bc)}{a(ma+nc)} > 0$$

$$\frac{d}{c} - \frac{mb+nd}{ma+nc} = \frac{d(ma+nc) - c(mb+nd)}{c(ma+nc)} = \frac{m(ad-bc)}{c(ma+nc)} > 0$$

$$\therefore \frac{b}{a} < \frac{mb+nd}{ma+nc} < \frac{d}{c} \quad (\text{おわり})$$

(注) 座標平面上で  $O(0, 0), A(a, b), B(mb+nd, ma+nd), C(c, d)$  として, 直線  $OA, OB, OC$  の傾きを比べるとほとんど明らかである。しかし, 上のような式変形を経験しておく, (2)へのヒントとなる。

(2)  $\frac{d}{c} - \frac{b}{a} = \frac{1}{ac}$  のとき

$$ad - bc = 1$$

$ma+nc$  と  $mb+nd$  について

$$d(ma+nc) - c(mb+nd) = m(ad-bc) = m$$

であるから,  $ma+nc$  と  $mb+nd$  に共通な素因数  $p$  があるとすれば,

$$p \mid ma+nc, p \mid mb+nd$$

$$\implies p \mid m, p \mid ma+nc, p \mid mb+nd$$

$$\implies p \mid m, p \mid nc, p \mid nd$$

$$\implies p \mid m, p \mid c, p \mid d \quad (\because \gcd(m, n) = 1)$$

$$\implies p \mid ad-bc$$

となるが,  $ad-bc=1$  であるから矛盾する。よって,

$$ma+nc \text{ と } mb+nd \text{ は互いに素である。} \quad (\text{おわり})$$