数チャレ 第45回(2004年10月)

座標平面上に，3つの格子点を頂点とする直角二等辺三角形Tがあり，Tの直角をはさむ2辺上には，頂点以外に格子点はないものとする。次のことを示せ。

(1) Tの斜辺上にある格子点は，頂点を除いて0個または1個である。

(2) Tの斜辺上に頂点以外の格子点があるための必要十分条件は，Tの面積が整数となることである。

ただし，座標平面上の格子点とは，x座標とy座標がともに整数である点のことである。

解答

整数は和，差について閉じているから，Tを平行移動させて直角の頂点を原点Oとしても，本問の証明には差し支えない。

残りの頂点をA, Bとすると，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{OB}$より

$$\mathrm{A}(a,\ b),\ \mathrm{B}(b,\ -a)\quad (a,\ b\text{は整数},\ a^2+b^2\neq 0)$$

としてよい。辺OA, OB上には端点以外に格子点はないから，

$$a\text{と}b\text{は互いに素}$$

である。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(a-b,\ a+b)$であり，

$$d=gcd(a-b,\ a+b)$$

とおくと，$a+b=2a-(a-b)=(a-b)+2b$より

$$d\,\big|\,2a,\quad d\,\big|\,2b$$

である。aとbは互いに素であるから，

$$d\,\big|\,2 \qquad \therefore\ d=1\text{ または }2$$

よって，斜辺AB上にある格子点は，頂点を除いて0個または1個である。

(証明おわり)

(2) Tの面積をSとすると$S=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$であり，

$$\begin{aligned}\text{「}S\text{は整数」}&\iff\text{「}a^2+b^2\text{は偶数」}\\&\iff\text{「}a\text{と}b\text{はともに奇数」}\ (\because\ gcd(a,\ b)=1)\\&\iff gcd(a+b,\ a-b)=2\\&\iff\text{「}T\text{の斜辺上に頂点以外の格子点がある」}\end{aligned}$$

(証明おわり)

(注) 辺OAは$y=\dfrac{b}{a}x,\ 0\leqq x\leqq a$と表され，$\dfrac{b}{a}x$は$x=1,\ 2,\ \cdots,\ a-1$に対して整数にならない。これは，$a\,\big|\,bx\Longrightarrow a\,\big|\,x$であることを意味するから，$a$と$b$は互いに素である。