数チャレ 第47回(2004年12月)

(1)　3以上の整数nに対して，nを割らない素数のうち最小のものをpとする。$n < p^2$ならば，1とnの間にあるnと互いに素な整数はすべて素数であることを示せ。

(2)　nが相異なる4つの素数の積であるとき，1とnの間にnと互いに素な合成数があることを示せ。

(3)　3以上の整数nに対して，1とnの間にあるnと互いに素な整数がすべて素数となるようなnをすべて求めよ。必要ならば，Chebyshevの定理(任意の2以上の整数mに対して，m以上$2m$未満の素数が存在する)を用いてもよい。

解答

(1)　1とnの間にあるnと互いに素な整数aの素因数分解を

$$a = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_r}^{e_r} \quad (p_1 < p_2 < \cdots < p_r,\ e_k > 0)$$

とすると，

$$p \leqq p_1 < p_2 < \cdots < p_r$$

となるから，

$$a \geqq p^{e_1+e_2+\cdots+e_r}$$

$a < n < p^2$より

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_r = 1 \qquad \therefore\ r = 1,\ e_1 = 1$$

よって，$a = p_1$は素数である。　(証明おわり)

(2)　nの素因数分解を$n = p_1p_2p_3p_4$ $(p_1 < p_2 < p_3 < p_4)$とし，nを割らない最小の素数をpとする。

(i)　$p = 2 < p_1$のとき，$p_1p_2p_3p_4 > 2^4 > 2^2$

(ii)　$p_1 = 2,\ p = 3$のとき，$p_1p_2p_3p_4 > 2 \times 3^3 > 3^2$

(iii)　$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p = 5$のとき，$p_1p_2p_3p_4 > 2 \times 3 \times 5^2 > 5^2$

(iv)　$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5$のとき，$p_1p_2p_3p_4 \geqq 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210 > 11^2$

よって，$n > p^2$であり，1とnの間にnと互いに素な合成数p^2が存在する。

(証明おわり)

(3)　3以上の整数nを割らない最小の素数pが$n < p^2$を満たすことは，1とnに間にあるnと互いに素な整数がすべて素数であることと同値であることに注意する。

1°　nの素因数が4個以上のとき

nの4つの素因数のうち大きい方から4つを$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$とすると，Chebychevの定理により$p < 2p_1,\ p < 2p_2$であるから

$$n \geqq p_1p_2p_3p_4 > p^2$$

2° nの素因数が3個のとき

(i) $p=2$または3または5のとき，$n \geqq 2\times3\times7>5^2>3^2>2^2$

(ii) $p=7$のとき，$n=2^a3^b5^c$ ($a,\ b,\ c$は正の整数)と表され，$n<7^2$より

$$a=b=c=1 \qquad \therefore\ n=30$$

3° nの素因数が2個のとき

(i) $p=2$または3のとき，$n \geqq 2\times5>3^2>2^2$

(ii) $p=5$のとき，$n=2^a3^b$ ($a,\ b$は正の整数)と表され，$n<5^2$より

$$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1)$$

$$\therefore\ n=6,\ 18,\ 12,\ 24$$

4° nの素因数が1個のとき

(i) $p=2$のとき，$n=q^a$(qは素数，aは正の整数)と表され，$3 \leqq n<2^2$より

$$q=3,\ a=1 \qquad \therefore\ n=3$$

(ii) $p=3$のとき，$n=2^a$(aは正の整数)と表され，$3 \leqq n<3^2$より

$$a=2,\ 3 \qquad \therefore\ n=4,\ 8$$

以上より，求める整数nは

$$n=3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30 \quad (答)$$