数チャレ 第48回 (2005年1月)

(1) 5で割り切れない自然数 n に対して

$$a^2+b^2=5n$$

を満たす自然数 $a,\ b$ が存在するとき，

$$(x,\ y)=\left(\frac{a+2b}{5},\ \ \frac{2a-b}{5}\right) \text{ または } \left(\frac{2a+b}{5},\ \ \frac{-a+2b}{5}\right)$$

は方程式 $x^2+y^2=n$ の整数解の組となることを示せ。

(2) $x^2+y^2=2005$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

解答

(1) k を整数として

$$(5k)^2=5\cdot 5k^2$$
$$(5k\pm 1)^2=5(5k^2\pm 2k)+1$$
$$(5k\pm 2)^2=5(5k^2\pm 4k)+4$$

となるから，平方数を5で割った余りは $0,\ 1,\ 4$ のいずれかである。したがって，n が5で割り切れないことに注意すると，

$$a^2+b^2=5n$$

を満たす自然数 $a,\ b$ は

$$a^2\equiv 1,\ \ b^2\equiv 4 \pmod 5 \text{ または } a^2\equiv 4,\ \ b^2\equiv 1 \pmod 5$$

を満たす。

$a,\ b$ の対称性より，$a^2\equiv 1,\ b^2\equiv 4 \pmod 5$ だけ考えれば十分であり，次の4つの場合に集約される。

(i) $a\equiv 1,\ b\equiv 2 \pmod 5$ のとき，$a+2b\equiv 0,\ 2a-b\equiv 0 \pmod 5$
(ii) $a\equiv 1,\ b\equiv 3 \pmod 5$ のとき，$2a+b\equiv 0,\ -a+2b\equiv 0 \pmod 5$
(iii) $a\equiv 4,\ b\equiv 2 \pmod 5$ のとき，$2a+b\equiv 0,\ -a+2b\equiv 0 \pmod 5$
(iv) $a\equiv 4,\ b\equiv 3 \pmod 5$ のとき，$a+2b\equiv 0,\ 2a-b\equiv 0 \pmod 5$

ゆえに，

$$(x,\ y)=\left(\frac{a+2b}{5},\ \ \frac{2a-b}{5}\right) \text{ または } \left(\frac{2a+b}{5},\ \ \frac{-a+2b}{5}\right)$$

のいずれか一方は整数の組となり，

$$(a+2b)^2+(2a-b)^2=(2a+b)^2+(-a+2b)^2=5(a^2+b^2)$$

より，$x^2+y^2=n$ の整数解となる。

(証明おわり)

(2) $2005 = 5 \times 401$ であるから，

$$x^2 + y^2 = 2005$$

の自然数解 $(a,\ b)$ に対して，(1)の操作により $x^2 + y^2 = 401$ の整数解 $(c,\ d)$ が一意に定まる。このとき，

$$(a,\ b) = (c + 2d,\ 2c - d) \text{ または } (2c - d,\ c + 2d)$$

である。$c^2 + d^2 = 401$ より

$$(c,\ d) = (\pm 1,\ \pm 20),\ (\pm 20,\ \pm 1) \quad \text{(複号同順)}$$

であり，$-d$ と $2d$ の一方は必ず負であるから，

$$a > 0,\ b > 0 \text{ ならば } d \neq \pm 20$$

が成り立つ。$c = -20$ のときも $c + 2d < 0,\ 2c - d < 0$ となるから，

$$c = 20$$

の場合に限られてしまう。

(i) $c = 20,\ d = 1$ のとき，$c + 2d = 22,\ 2c - d = 39$

(ii) $c = 20,\ d = -1$ のとき，$c + 2d = 18,\ 2c - d = 41$

以上より，不定方程式 $x^2 + y^2 = 2005$ の自然数解は

$$(x,\ y) = (22,\ 39),\ (39,\ 22),\ (18,\ 41),\ (41,\ 18) \quad \text{(答)}$$

ですべてである。