数チャレ 第51回(2005年4月)

(1) すべての整数 m に対して $\dfrac{pm}{m^2-m-1}$ がつねに整数となるような定数 p を求めよ。

(2) $a,\ b$ を定数として整式 $f(x)$ を

$$f(x)=x^4+ax^2+bx-a-2$$

によって定義する。すべての整数 m に対して $\dfrac{f(m)}{m^2-m-1}$ がつねに整数となるための必要十分条件を $a,\ b$ を用いて表せ。

出典：2005年 北海道大学

解答

(1) m が十分大きいと

$$\left|\frac{pm}{m^2-m-1}\right|=\left|\frac{p}{m-1-\dfrac{1}{m}}\right|<1$$

となるから，すべての整数 m に対して $\dfrac{pm}{m^2-m-1}$ がつねに整数になるとすれば，

$$\frac{pm}{m^2-m-1}=0 \qquad\qquad \therefore\ \ p=0 \quad (答)$$

(2) $F(m)=\dfrac{f(m)}{m^2-m-1}$ とおく。

$$F(0)=-f(0)=a+2,\quad F(1)=-f(1)=b-1$$

はともに整数であるから，

$$a,\ b\ は整数$$

であることが必要である。

$$\begin{aligned} f(m)&=m^4+am^2+bm-a-2\\ &=(m^2-m-1)(m^2+m+a+2)+(a+b+3)m \end{aligned}$$

より

$$F(m)=m^2+m+a+2+\frac{(a+b+3)m}{m^2-m-1}$$

と表され，$m^2+m+a+2$ は整数であるから，すべての整数 m に対して $F(m)$ がつねに整数となるための条件は，(1)とあわせて

$$a\in\boldsymbol{Z}\ \ かつ\ \ a+b+3=0 \quad (答)$$

(注) 他にも同値な表現はいろいろある。なお，$\boldsymbol{Z}$ は整数の集合を表す。