数チャレ 第53回 (2005年6月)

$a_n = 2^{2^n} + 1$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。

(1) a_{n+1} を a_n で表せ。

(2) 異なる自然数 $m,\ n$ に対して，a_m と a_n は互いに素であることを示せ。

解答

(1) $a_{n+1} - 1 = 2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2 = (a_n - 1)^2$ より

$$a_{n+1} = (a_n - 1)^2 + 1 \quad (\text{答})$$

(2) $m > n$ として示せば十分である。二項定理を用いると

$$\begin{aligned} a_m &= (2^{2^n})^{2^{m-n}} + 1 \\ &= (a_n - 1)^{2^{m-n}} + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{2^{m-n}} {}_{2^{m-n}}\mathrm{C}_k (-1)^{2^{m-n}-k} {a_n}^k + 1 \\ &= (a_n\text{の倍数}) + (-1)^{2^{m-n}} + 1 \\ &= (a_n\text{の倍数}) + 2 \end{aligned}$$

と変形され，

$$gcd(a_m,\ a_n)\text{ は 2 を割る正の整数}$$

であることがわかるが，

$$a_n = 2^{2^n} + 1\text{ は奇数}$$

であるから

$$gcd(a_m,\ a_n) = 1$$

したがって，a_m と a_n は互いに素である。

(証明おわり)