

数チャレ 第54回 (2005年7月)

n を 3 以上の整数とする。

- (1) k を n と互いに素な整数とするとき, $n - k$ も n と互いに素な整数であることを示せ。
- (2) 0 と 1 の間にある分母を n とする既約分数の総和は整数であることを示せ。

解答 (1) $n - k$ と n が互いに素でないとするれば,

$$p \mid n - k, \quad p \mid n$$

となる素数 p が存在する。このとき,

$$p \mid k, \quad p \mid n$$

となって, k と n は互いに素でない。

対偶をとると, k と n が互いに素な整数とするとき, $n - k$ と n は互いに素である。 (証明おわり)

- (2) 0 と $\frac{1}{2}$ の間にある n を分母とする既約分数を

$$\frac{a_1}{n}, \frac{a_2}{n}, \dots, \frac{a_m}{n}$$

とする。(1)より

$$\frac{n - a_1}{n}, \frac{n - a_2}{n}, \dots, \frac{n - a_m}{n}$$

も n を分母とする既約分数であり, $\frac{1}{2}$ と 1 の間にあるものはこれらで尽くされる。

よって, 0 と 1 の間にある n を分母とする既約分数の総和は

$$\sum_{k=1}^m \frac{a_k}{n} + \sum_{k=1}^m \frac{n - a_k}{n} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{a_k}{n} + \frac{n - a_k}{n} \right) = \sum_{k=1}^m 1 = m$$

となって, 整数である。 (証明おわり)

(注)

- 1° $n = 2$ のときは, 0 と 1 の間にある分母を n とする既約分数は $\frac{1}{2}$ だけとなって, この命題は成り立たない。
- 2° 事実上, n が 3 以上の自然数であるとき, n と互いに素な n 以下の自然数が偶数個あることを示したことになる。