数チャレ 第55回 (2005年8月)

$x,\ y$ は互いに素な正の整数であるとする。

(1) $x+y$ と x^2-xy+y^2 の最大公約数は1または3であることを示せ。

(2) $x^3+y^3=3^z$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ。

解答

(1) $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy\ (x+y>0,\ xy>0)$ であるから

$$gcd(x+y,\ x^2-xy+y^2)=gcd(x+y,\ 3xy) \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで，$x+y$ と x に共通な素因数 p があるとすれば，y も p で割り切れて互いに素であることに反するから，

$$gcd(x+y,\ x)=1$$

同様にして $gcd(x+y,\ y)=1$ も成り立つから

$$gcd(x+y,\ xy)=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

3が素数であることに注意すると，①かつ② より

$$gcd(x+y,\ x^2-xy+y^2)=gcd(x+y,\ 3)=1 \text{ または } 3$$

(証明おわり)

(2) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$，$x+y \geqq 2$ であるから，(1)より

$$(x+y,\ x^2-xy+y^2)=(3^z,\ 1),\ (3,\ 3^{z-1}),\ (3^{z-1},\ 3)$$

の場合に限られる。

(i) $x+y=3^z$，$x^2-xy+y^2=1$ のとき

$$x^2-x(3^z-x)+(3^z-x)^2=1$$

$$\therefore\ 3x^2-3^{z+1}x+3^{2z}=1$$

左辺は3の倍数であるから不適である。

(ii) $x+y=3$ のとき

$$(x,\ y)=(1,\ 2) \text{ または } (2,\ 1)$$

であり，

$$3^z=1^3+2^3=9 \qquad \therefore\ z=2$$

(iii) $x+y=3^{z-1}\ (z \geqq 2)$，$x^2-xy+y^2=3$ のとき

$$x^2-x(3^{z-1}-x)+(3^{z-1}-x)^2=3$$

$$\therefore\ x^2-3^{z-1}x+(3^{2z-3}-1)=0$$

2次方程式が整数解をもつことより

$$(\text{判別式})=(3^{z-1})^2-4(3^{2z-3}-1)=4-3^{2z-3}$$

が平方数となることが必要であるが，$3^{2z-3} \geqq 3^1$ より

$$3^{2z-3}=3 \text{ すなわち } z=2$$

のときに限られる。このとき (ii) と同じになる。

以上より

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2) \quad (\text{答})$$