数チャレ 第56回(2005年9月)

(1) 奇数の平方は8で割ると1余ることを示せ。

(2) a, b, cを奇数とするとき，2次方程式$ax^2+bx+c=0$の解は無理数であることを示せ。

解答

(1) 奇数は$2n+1$ (nは整数)と表されて，平方すれば

$$(2n+1)^2=4n(n+1)+1$$

隣り合う整数n, $n+1$の一方は偶数であるから，奇数の平方は8で割ると1余る。

(証明おわり)

(2) 2次方程式$ax^2+bx+c=0$の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

であり，a, b, cは整数であるから，

$$\begin{aligned}\text{解}\ x\text{が有理数} &\iff \sqrt{b^2-4ac}\ \text{が有理数}\\ &\iff b^2-4ac\ \text{が平方数}\end{aligned}$$

と言い換えられる。

解xが有理数であるとすれば，

$$b^2-4ac=m^2 \quad (m\text{は整数})$$

と表され，bは奇数で$4ac$は偶数であるから

mは奇数

である。(1)よりb^2もm^2も8で割ると1余るから

$4ac=b^2-m^2$は8の倍数

となり，acが奇数であることと矛盾する。

よって，2次方程式$ax^2+bx+c=0$の解は有理数でない。

(注)

1° 整数解をもたないことであれば，もっと簡単に示される。

a, b, cは奇数であるから，任意の整数nに対して

$$an^2+bn+c\equiv n^2+n+1 \pmod 2$$

$n^2+n=n(n+1)$は偶数であるからan^2+bn+cは奇数となり，

$$an^2+bn+c\neq 0$$

が導かれる。

2° (1)を用いないで，有理数解をもたないことを示すことができる。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が有理数解 $\dfrac{p}{q}$ (p と q は互いに素な整数)をもつとすると，

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2+b\cdot\frac{p}{q}+c=0$$

$$\therefore\ ap^2+bpq+cq^2=0 \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

$(*)$を

$$ap^2=q(-bp-cq)$$

とみると ap^2 は q の倍数であるが，p と q は互いに素であるから，a は q の倍数である。q は奇数 a の約数であるから，

q は奇数

である。

同様にして，p は奇数 c の約数であるから，

p は奇数

であることも導かれる。

よって，ap^2，bpq，cq^2 はすべて奇数であり，

$ap^2+bpq+cq^2$ は奇数

となって$(*)$と矛盾するから，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は有理数でない。

(証明おわり)