

数チャレ 第58回(2005年11月)

$1 < a < b < 100$ を満たす整数 a, b のうち, $\log_a b$ が整数でない有理数となる (a, b) の組をすべて求めよ。

解答

有理数 $\log_a b$ を

$$\log_a b = \frac{m}{n} \quad (m \text{ と } n \text{ は互いの素な整数})$$

と表すと, $1 < a < b$ より $1 \leq m < n$ としてよく,

$$\log_a b = \frac{m}{n} \iff b = a^{\frac{m}{n}} \iff b^n = a^m$$

m と n は互いに素であるから, 素因数分解を考えると

$$a \text{ は } n \text{ 乗数 } (n \geq 2)$$

であることが必要であり, $1 < a < 100$ においては

$$a = 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 8, 27, 32$$

に限られる。

$$\frac{m}{n} > 1, \frac{m}{n} \notin \mathbf{Z}, b < 100 \text{ に注意して } b \text{ を吟味していくと,}$$

$$a = 4 \text{ のとき } b = 4^{\frac{3}{2}} = 8 \text{ または } b = 4^{\frac{5}{2}} = 32$$

$$a = 9 \text{ のとき } b = 9^{\frac{3}{2}} = 27$$

$$a = 16 \text{ のとき } b = 16^{\frac{3}{2}} = 64 \text{ または } b = 16^{\frac{5}{4}} = 32$$

$$a = 25, 36, 49 \text{ のとき, } \frac{3}{2} \text{ 乗は } 100 \text{ を越えるから不適である。}$$

$$a = 64 \text{ のとき, } \frac{3}{2} \text{ 乗, } \frac{4}{3} \text{ 乗, } \frac{7}{6} \text{ 乗はいずれも } 100 \text{ を越えるから不適。}$$

$$a = 81 \text{ のとき, } \frac{3}{2} \text{ 乗, } \frac{5}{4} \text{ 乗はいずれも } 100 \text{ を越えるから不適。}$$

$$a = 8 \text{ のとき } b = 8^{\frac{4}{3}} = 16 \text{ または } b = 8^{\frac{5}{3}} = 32$$

$$a = 27 \text{ のとき } b = 27^{\frac{4}{3}} = 81$$

$$a = 32 \text{ のとき } b = 32^{\frac{6}{5}} = 64$$

以上より, 求める (a, b) の組は

$$(a, b) = (4, 8), (4, 32), (8, 16), (8, 32), (9, 27), \\ (16, 32), (16, 64), (27, 81), (32, 64)$$

(答)