

## 数チャレ 第59回 (2005年12月)

3辺の長さが整数である直角三角形で、周の長さが面積の2倍となるものをすべて求めよ。

解答

直角をはさむ2辺の長さを  $a, b$  とし、斜辺の長さを  $c$  とすると、題意の条件は

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 & \dots\dots ① \\ a + b + c = ab & \dots\dots ② \end{cases}$$

である。

$$\begin{aligned} ① & \iff (a+b)^2 - 2ab = c^2 \\ & \iff (a+b)^2 - c^2 = 2ab \\ & \iff (a+b+c)(a+b-c) = 2ab \end{aligned}$$

であるから、②より

$$a + b - c = 2 \quad \dots\dots ③$$

② + ③より  $c$  を消去して

$$\begin{aligned} 2(a+b) &= ab + 2 \\ \therefore (a-2)(b-2) &= 2 \end{aligned}$$

$a, b$  は正の整数であるから

$$\begin{aligned} (a-2, b-2) &= (1, 2) \text{ または } (2, 1) \\ \therefore (a, b) &= (3, 4) \text{ または } (4, 3) \end{aligned}$$

②または③より  $c$  を求めると

$$c = 5$$

以上より、条件を満たす直角三角形は

3辺の長さが 3, 4, 5 である直角三角形 (答)

に限られる。