数チャレ 第60回 (2006年1月)

今年は西暦2006年，平成18年であるが，2006と18の最大公約数は2であり，2006は17の倍数である。つまり，西暦年と平成年の最大公約数は2であり，西暦年が前年の平成年の倍数である。

21世紀内で，このような条件を満たす西暦年をすべて求めよ。ただし，平成は21世紀中は続くものとする。

解答

条件を満たす西暦年を x，その平成年を y とすると，条件は

$$\begin{cases} x = y + 1988 & \cdots\cdots ① \\ gcd(x,\ y) = 2 & \cdots\cdots ② \\ x = (y-1)z \qquad (z\text{ は自然数}) & \cdots\cdots ③ \\ 2001 \leqq x \leqq 2100 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

①かつ② より x を消去すると，互除法により

$$2 = gcd(y+1988,\ y) = gcd(1988,\ y) \qquad \cdots\cdots ⑤$$

①かつ③ より x を消去すると

$$y + 1988 = (y-1)z$$

$$\therefore\ (y-1)(z-1) = 1989 = 3^2\times13\times17 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

1988は4で割り切れるから，⑤より必要条件として

$$y \equiv 2 \pmod 4 \qquad \therefore\ y - 1 \equiv 1 \pmod 4$$

⑥より，これを満たすのは

$$y - 1 = 1,\ 13,\ 17,\ 13\times17,\ 3^2,\ 3^2\times13,\ 3^2\times17,\ 3^2\times13\times17$$

$$\therefore\ y = 2,\ 14,\ 18,\ 222,\ 10,\ 118,\ 154,\ 1990$$

に限られる。①かつ④ より

$$13 \leqq y \leqq 112$$

となることを考えて，

$$y = 14 \text{ または } 18$$

$1988 = 2^2\times7\times71$ に注意して ⑤をチェックすると

$$gcd(1988,\ 14) = 14,\quad gcd(1988,\ 18) = 2$$

であるから，条件を満たすのは $y = 18$ のときだけであり，求める西暦年は

2006年　(答)

のみである。

(注) 条件④をはずすと，$y = 2,\ 10,\ 118,\ 222,\ 1990$ も条件を満たす。ただ，平成118，222，1990年も解だと言われてもなんだか空しい。