数チャレ 第61回 (2006年2月)

自然数 n に対して，1, 2, 3, $\cdots$, n の中で n と互いに素な自然数の個数を $\varphi(n)$ と表すことにする。

(1) p を素数，m を自然数とするとき，$\varphi(p^m)$ を求めよ。

(2) a と b が互いに素な自然数であるとき，$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ が成り立つことを示せ。

(3) $\varphi(n)=6$ となる自然数 n をすべて求めよ。

解答

(1) 区間 $(0,\ p^m\,]$ は，k を自然数として

$$(0,\ p],\ (p,\ 2p],\ \cdots,\ ((k-1)p,\ kp],\ \cdots,\ ((p^{m-1}-1)p,\ p^m\,]$$

の和集合で表され，p が素数であることより

$(k-1)p+1,\ (k-1)p+2,\ \cdots,\ (k-1)p+p-1$ はすべて p と互いに素

であるから，

$$\varphi(p^m)=p^{m-1}(p-1) \quad (答)$$

(2) $\varphi(a)=r$ とし，1 以上 a 以下で a と互いに素な自然数を

$$x_1\,(=1),\ \ x_2,\ \cdots,\ x_r$$

とする。a と b は互いに素であるから

「ab と互いに素」$\Longleftrightarrow$「a と互いに素」かつ「b と互いに素」

であることを考えると，ab 以下で ab と互いに素なものは

$$\begin{array}{llll}
x_1, & x_2, & \cdots, & x_r, \\
x_1+a, & x_2+a, & \cdots, & x_r+a, \\
x_1+2a, & x_2+2a, & \cdots, & x_r+2a, \\
 & \vdots & & \\
x_1+(b-1)a, & x_2+(b-1)a, & \cdots, & x_r+(b-1)a
\end{array}$$

の中で b と互いに素なものである。

a と b は互いに素であるから，

$$0,\ a,\ 2a,\ \cdots,\ (b-1)a$$

は順不同で，b で割った余りが 0, 1, 2, $\cdots$, $b-1$ であり，

$$x_k,\ x_k+a,\ x_k+2a,\ \cdots,\ x_k+(b-1)a$$

も順不同で，b で割った余りが 0, 1, 2, $\cdots$, $b-1$ である。

各 k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ に対して，この中に b と互いに素なものは $\varphi(b)$ 個ずつあるから

$$\varphi(ab)=r\times\varphi(b)=\varphi(a)\varphi(b)$$

(証明おわり)

(3) n の素因数分解を

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$

とすると，(1), (2)より

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

となる。

(i) $r = 1$ のとき，$p_1 = p,\ e_1 = e$ として

$$\varphi(n) = p^{e-1}(p-1) = 6 \iff (e,\ p) = (1,\ 7),\ (2,\ 3)$$

(ii) $r = 2$ のとき

n が奇数であるとき，$\varphi(n)$ の約数 $(p_1-1)(p_2-1)$ は 4 で割り切れるから，$\varphi(n) = 6$ ならば n は偶数に限られる。$p_1 = 2,\ p_2 = p,\ e_1 = a,\ e_2 = b$ として

$$n = 2^a p^b$$

とおくと，$p-1$ が偶数であることに注意して

$$\begin{aligned}
&\varphi(n) = 2^{a-1}p^{b-1}(p-1) = 6 \\
&\iff (p-1,\ 2^{a-1}p^{b-1}) = (2,\ 3),\ (6,\ 1) \\
&\iff (p,\ a,\ b) = (3,\ 1,\ 2),\ (7,\ 1,\ 1)
\end{aligned}$$

(iii) $r \geqq 3$ のとき

$$\varphi(n) \geqq (3-1)\times(5-1) = 8 > 6$$

以上より，$\varphi(n) = 6$ となる自然数 n は

$$n = 7,\ 9,\ 14,\ 18 \quad \text{(答)}$$

ですべてである。