数チャレ 第62回(2006年3月)

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，$a_1 = b_1 = 1$ および，関係式

$$a_{n+1} = 2a_n b_n$$
$$b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$$

をみたすものとする。

(1) $n \geqq 3$ のとき，a_n は3で割り切れるが，b_n は3で割り切れないことを示せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素であることを示せ。

出典：2006年 九州大学

解答

(1) まず a_3, b_3 を求めると，$a_1 = b_1 = 1$ より

$$a_2 = 2 \times 1 \times 1 = 2, \quad b_2 = 2 \times 1^2 + 1^2 = 3,$$
$$a_3 = 2 \times 2 \times 3 = 12, \quad b_3 = 2 \times 2^2 + 3^2 = 17$$

となるから，a_3 は3で割り切れるが，b_3 は3で割り切れない。

a_k が3で割り切れて b_k が3で割り切れないとすれば，

$a_{k+1} = 2a_k b_k$ および $2a_k^2$ は3で割り切れ，

$b_{k+1} = 2a_k^2 + b_k^2$ は3で割り切れない

ことがわかる。

よって，数学的帰納法により，3以上のすべての自然数 n に対して，a_n は3で割り切れるが，b_n は3で割り切れない。 (おわり)

(2) (1)と同様にして，数学的帰納法により

b_n は奇数

であることがわかる。

a_{k+1} と b_{k+1} が共通の素因数 p をもつとすれば，p は奇数の因数であるから

p は奇素数

であり，p が $a_{k+1} = 2a_k b_k$ を割ることより

a_k, b_k の少なくとも一方は p で割り切れる。

$b_{k+1} = 2a_k^2 + b_k^2$ は奇素数 p で割り切れるから，結局

a_k, b_k はともに p で割り切れる。

対偶をとると，

a_k と b_k が互いに素ならば，a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素

である。

a_1 と b_1 は互いに素であるから，数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して a_n と b_n は互いに素である。 (おわり)