数チャレ 第63回(2006年4月)

二組の3整数の組合せ $\{1,\ 10,\ 11\}$ と $\{2,\ 7,\ 13\}$ に対して，

$$1+10+11=2+7+13$$
$$1^2+10^2+11^2=2^2+7^2+13^2$$

が成り立つ。このように，和も平方の和も等しくなる二組の3整数の組合せがたくさんある。

次の各問に答えよ。

(1) 1から7までの7個の整数の中の相異なる6個の整数を用いて，和も平方の和も等しくなるような二組の3整数の組合せを1つ見つけよ。

(2) どのような連続する7個の整数についても，その中の相異なる6個の整数を用いて，和も平方の和も等しくなるような二組の3整数の組合せを作ることができることを示せ。

出典：2006年 宮崎大学

解答

(1) $1+5+6=2+3+7=12,\ \ 1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2=62$ より

$$\{1,\ 5,\ 6\}\text{ と }\{2,\ 3,\ 7\}\quad(\text{答})$$

(2) 任意の連続する7整数を

$$n-3,\ n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$$

とすれば，

$$(n-3)+(n+1)+(n+2)=(n-2)+(n-1)+(n+3)=3n$$
$$\begin{aligned}(n-3)^2+(n+1)^2+(n+2)^2&=(n-2)^2+(n-1)^2+(n+3)^2\\&=3n^2+1^2+2^2+3^2\end{aligned}$$

となるから，任意の連続する7整数の中の6整数を用いて和も平方の和も等しい二組の3整数の組合せを作ることができる。 (おわり)