数チャレ 第64回(2006年5月)

$2^{2n}+3^{2n}$ が13で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

解答

$2^6=64\equiv -1 \pmod{13}$, $2^{12}\equiv 1 \pmod{13}$, $3^3=27\equiv 1 \pmod{13}$ であるから, $2^{2n}+3^{2n}$ を13で割った余りは n について6を周期とする。

$$\begin{aligned}
&2^2+3^2=13\\
&2^4+3^4=16+81=97\equiv 6 \pmod{13}\\
&2^6+3^6\equiv -1+1\equiv 0 \pmod{13}\\
&2^8+3^8\equiv -2^2+3^2\equiv 5 \pmod{13}\\
&2^{10}+3^{10}\equiv -2^4+3^4\equiv -16+81\equiv 0 \pmod{13}\\
&2^{12}+3^{12}\equiv 1+1\equiv 2 \pmod{13}
\end{aligned}$$

であるから,

$$13 \mid 2^{2n}+3^{2n} \iff n\text{は奇数}\quad(\text{答})$$

別解

n が正の奇数ならば,

$$\begin{aligned}
2^{2n}+3^{3n}&=4^n+9^n\\
&=(4+9)(4^{n-1}-4^{n-2}\cdot 9+4^{n-3}\cdot 9^2-\cdots+9^{n-1})\\
&=13\times(4^{n-1}-4^{n-2}\cdot 9+4^{n-3}\cdot 9^2-\cdots+9^{n-1})
\end{aligned}$$

は13で割り切れる。

n が正の偶数($n-1$ が正の奇数)ならば,

$$\begin{aligned}
2^{2n}+3^{3n}&=4(2^{2(n-1)}+3^{2(n-1)})+5\cdot 3^{2(n-1)}\\
&\equiv 5\cdot 3^{2(n-1)} \pmod{13}
\end{aligned}$$

は13で割り切れない。

正の偶数と正の奇数ですべての自然数を尽くすから,

$$13 \mid 2^{2n}+3^{2n} \iff n\text{は奇数}\quad(\text{答})$$