数チャレ 第65回(2006年6月)

(1) $\sqrt[3]{2}$が無理数であることを示せ。

(2) 整数a, b, cが $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ を満たすならば， $a=b=c=0$であることを示せ。

解答

(1) $\sqrt[3]{2}$が有理数であるとすれば，

$$\sqrt[3]{2}=\frac{m}{n}\quad(n\neq 0)$$

を満たす整数m, nが存在する。このとき，

$$2n^3=m^3$$

となって，素因数分解において両辺の2の指数が異なるので矛盾する。

(おわり)

(2) 整数a, b, cが

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たすならば，両辺に$\sqrt[3]{2}$をかけると

$$2c+a\sqrt[3]{2}+b\sqrt[3]{4}=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

①$\times b-$②$\times c$ より

$$ab-4c^2+\sqrt[3]{2}(b^2-ac)=0$$

が成り立つが，ここで $b^2-ac\neq 0$ であるとすれば，$\sqrt[3]{2}$は整数比(有理数)となって(1)で示したことに反するから，

$$b^2-ac=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

このとき

$$ab-4c^2=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

③かつ④ より

$$(abc=)\ b^3=4c^3$$

$bc\neq 0$であるとすれば，4が立方数(3乗数)でないことより素因数分解の一意性に反するから

$$b=c=0$$

このとき，①より

$$a=0$$

(おわり)