数チャレ 第66回(2006年7月)

(1)　自然数 $m,\ n$ が $3^m-1=n^2$ を満たすならば，$m,\ n$ はともに偶数であることを示せ。
(2)　$3^m-1=n^2$ を満たす自然数 $m,\ n$ は存在しないことを示せ。

解答

(1)　奇数の積は奇数であるから 3^m は奇数で

$$3^m-1=n^2 \text{ は偶数}$$

であり，2は素数であるから

$$n \text{ は偶数}(2\text{ の倍数})$$

である。

$$3^m=(4-1)^m=(4\text{ の倍数})+(-1)^m$$

であるから，$3^m-1=n^2$ より

$$(-1)^m-1 \text{ は } 4 \text{ の倍数}$$

よって，m は偶数である。　(証明おわり)

(2)　自然数 $m,\ n$ が

$$3^m-1=n^2$$

を満たすとすると，n は3で割り切れないから

$$n=3k\pm1 \quad (k \text{ は整数})$$

と表され，

$$n^2=3(k^2\pm2k)+1\equiv1 \pmod 3$$

一方，

$$3^m-1\equiv-1\equiv2 \pmod 3$$

であるから，矛盾する。

よって，$3^m-1=n^2$ を満たす自然数 $m,\ n$ は存在しない。　(証明おわり)

(注)　(1)の結果より

$$m=2d \quad (d \text{ は自然数})$$

と表されることから，

$$3^m-1=(3^d+1)(3^d-1)=n^2$$

と変形して，$m=n=0$ に限られることを導く解法も考えられる。

第20回(2002年9月)において，

10進法で各位がすべて等しい数は平方数にならない

ことを出題したが，本問(2)は

3進法で各位がすべて2である数は平方数にならない

ことを表している。3進法で各位がすべて1である数の中には，

4 (3進法で11)，121 (3進法で11111)

など平方数になるものは存在する。