数チャレ 第67回(2006年8月)

(1) $m,\ n$ は $0<m<n$ を満たす整数とし，$\dfrac{m}{n}$ 以下の最大の単位分数を $\dfrac{1}{p}$ (p は正の整数)とするとき，$\dfrac{m}{n}-\dfrac{1}{p}$ の既約分数表示の分子は m より小さいことを示せ。

(2) 1より小さい正の有理数は，相異なる単位分数(分子は1，分母は正の整数)の有限和で表されることを示せ。

解答

(1)
$$\frac{m}{n}-\frac{1}{p}=\frac{mp-n}{np}$$

単位分数 $\dfrac{1}{p}$ の最大性より

$$p \geqq 2,\quad \frac{1}{p} \leqq \frac{m}{n} < \frac{1}{p-1} \qquad \therefore\ \ 0 \leqq mp-n < m$$

(おわり)

(2) (1)において，

$$\frac{1}{p}-\left(\frac{m}{n}-\frac{1}{p}\right)=\frac{n-(mp-n)}{np}>\frac{m-(mp-n)}{np}>0$$

であるから

$$\frac{m}{n}-\frac{1}{p}<\frac{1}{p}$$

したがって，1より小さい正の有理数

$$q=\frac{m_1}{n_1} \quad (m_1,\ n_1 \text{ は } 0<m_1<n_1 \text{ を満たす整数})$$

に対して，$\dfrac{1}{p_k}$ (p_k は2以上の整数)を $\dfrac{m_k}{n_k}$ 以下の最大の単位分数とし，

$$\frac{m_{k+1}}{n_{k+1}}=\frac{m_k}{n_k}-\frac{1}{p_k},\quad gcd(m_{k+1},\ n_{k+1})=1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

により正の整数から成る数列 $\{m_k\}$，$\{n_k\}$ を定めると，

(A) $m_1>m_2>m_3>\cdots\cdots \geqq 1$

(B) $p_1<p_2<p_3<\cdots\cdots$

が成り立つ。

(A)より有限回で$(*)$の作業は終わり，(B)より単位分数 $\dfrac{1}{p_k}$ は相異なるから，1より小さい正の有理数は相異なる単位分数(分母は正の整数)の有限和で表される。

(おわり)