

数チャレ 第68回 (2006年9月)

次の条件(*)を満たす正の整数 a, b, c を考える；

$$(*) \quad \frac{a+1}{b}, \frac{b+1}{c}, \frac{c+1}{a} \text{ はすべて整数である。}$$

- (1) $a > b > c > 0$ のとき，(*)を満たす整数の組 (a, b, c) は存在しないことを示せ。
 (2) $0 < a < b < c$ のとき，(*)を満たす整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

解答

$$\frac{a+1}{b} = x, \quad \frac{b+1}{c} = y, \quad \frac{c+1}{a} = z$$

とおくと，

$$\begin{cases} a+1 = bx & (x \text{ は正の整数}) & \dots\dots \textcircled{1} \\ b+1 = cy & (y \text{ は正の整数}) & \dots\dots \textcircled{2} \\ c+1 = az & (z \text{ は正の整数}) & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

- (1) $a > b > c > 0$ のとき ③を満たすとすれば，

$$c+1 = az < a+1 < 2a$$

であるから

$$z = 1$$

このとき $c+1 = a$ となって，

$$c+1 > b > c$$

を満たす整数 b は存在しないから矛盾である。

よって，(*)を満たす整数の組 (a, b, c) は存在しない。 (おわり)

- (2) $0 < a < b < c$ のとき，①より

$$a+1 = bx < b+1 < 2b$$

となるから

$$x = 1, \quad a+1 = b \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

同様に考えて，②より

$$y = 1, \quad b+1 = c \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

④，⑤より

$$c = a+2$$

であり，③より

$$(a+2)+1 = az \quad \therefore a(z-1) = 3$$

a は正の整数で 3 の約数であるから

$$a = 1 \text{ または } 3$$

④，⑤より

$$(a, b, c) = (1, 2, 3), (3, 4, 5) \quad (\text{答})$$