数チャレ 第69回(2006年10月)

自然数nに対して，$(2+\sqrt{3})^n$ の整数部分を a_n とする。

(1) $a_1+1-(2+\sqrt{3})$ および $a_2+1-(2+\sqrt{3})^2$ を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

(3) a_{2006} の (10進法表示における) 1の位を求めよ。

解答

(1) $1^2<3<2^2$ より $1<\sqrt{3}<2$ であるから

$$a_1=\left[2+\sqrt{3}\right]=2+1=3$$

$$\therefore\ a_1+1-(2+\sqrt{3})=2-\sqrt{3} \quad (答)$$

$n=2$ のとき

$$(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}=7+\sqrt{48}$$

であるが，$6^2<48<7^2$ より

$$a_2=\left[7+\sqrt{48}\right]=7+6=13$$

$$\therefore\ a_2+1-(2+\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3} \quad (答)$$

(2) $\alpha=2+\sqrt{3}$，$\beta=2-\sqrt{3}$ とおく。

(1)より $a_n+1-(2+\sqrt{3})^n=(2-\sqrt{3})^n$ であることが予想できるので，まず

$$b_n=\alpha^n+\beta^n$$

が整数になることをnについての数学的帰納法で示す。

$$b_1=\alpha+\beta=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4,$$
$$b_2=\alpha^2+\beta^2=(7+4\sqrt{3})+(7-4\sqrt{3})=14$$

はともに整数である。

$$b_k=\alpha^k+\beta^k,\quad b_{k+1}=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$$

がともに整数であるとすれば，

$$\begin{aligned}b_{k+2}&=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}\\&=(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)\\&=4(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-(\alpha^k+\beta^k)\\&=4b_{k+1}-b_k\end{aligned}$$

も整数になるから，すべての自然数nに対して

$$b_n=\alpha^n+\beta^n\text{ は整数}$$

である。

$0<\beta=2-\sqrt{3}<1$ より $0<\beta^n<1$ であるから

$$\alpha^n<b_n=\alpha^n+\beta^n<\alpha^n+1 \qquad \therefore\ b_n-1<\alpha^n<b_n$$

a_n は α^n の整数部分であるから，$a_n=b_n-1$ であり，

$$a_n=\alpha^n+\beta^n-1=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n-1 \quad (答)$$

(3) (2)の考察より

$$a_n = b_n - 1,\quad b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

であるから，$\{b_n\}$ を消去すると

$$a_{n+2} + 1 = 4(a_{n+1} + 1) - (a_n + 1)$$

$$\therefore\quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n + 2$$

さらに，

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= 4a_{n+2} - a_{n+1} + 2 \\ &= 4(4a_{n+1} - a_n + 2) - a_{n+1} + 2 \\ &= 15a_{n+1} - 4a_n + 10 \end{aligned}$$

より

$$a_{n+3} - a_n = 5(3a_{n+1} - a_n + 2) \qquad \cdots\cdots ①$$

また，

$$a_1 = 3,\quad a_2 = 13,\quad a_{n+2} = 2(2a_{n+1} - a_n + 1) + a_n$$

より，a_n はつねに奇数であるから

$a_{n+3} - a_n$ は偶数 $\qquad \cdots\cdots$ ②

である。2 と 5 は互いに素であるから，①，②より

$a_{n+3} - a_n$ はつねに 10 で割り切れ，$a_{n+3} \equiv a_n \pmod{10}$

$2006 = 3 \times 668 + 2$ より

$$a_{2006} \equiv a_2 \pmod{10},\quad a_2 = 13$$

であるから，

a_{2006} の (10 進法表示における) 1 の位は 3 (答)