数チャレ 第70回(2006年11月)

自然数 a, b, c, x に対して，方程式

$$x^a + x^b = x^c \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える。

(1) $a+b=c$ のとき，①を満たす $(a,\ b,\ c,\ x)$ の組をすべて求めよ。

(2) 3辺の長さが a, b, c である直角三角形が存在するとき，①は成り立たないことを示せ。

解答

(1) $a \leqq b$ とすると

$$a+b=c \qquad \cdots\cdots ②$$

より，①は

$$x^a(1+x^{b-a}) = x^{a+b}$$

$$1+x^{b-a} = x^b \qquad \therefore\ x^{b-a}(x^a-1)=1$$

整数の積が1であることと $x^{b-a}>0$ を考えて

$$x^{b-a} = x^a - 1 = 1 \qquad \therefore\ x^a = x^b = 2$$

素因数分解を考えると

$$a=b=1,\quad x=2$$

$a \geqq b$ としても同様であり，②より c も求めて，

$$(a,\ b,\ c,\ x) = (1,\ 1,\ 2,\ 2) \quad (\text{答})$$

(2) ①が成り立つとして矛盾を導く。①より $a<c$, $b<c$ であるから，

$$a^2+b^2=c^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つときだけ考えればよい。

$a=b$ とすると $2a^2=c^2$ となるが，素因数分解において左辺の2の指数は奇数，右辺の2の指数は偶数となって，分解の一意性に反する。対称性も考慮して

$$a<b<c \qquad \cdots\cdots ④$$

として示せば十分である。

このとき，①の両辺を $x^a\,(>0)$ で割って

$$1+x^{b-a} = x^{c-a} \qquad \therefore\ x^{b-a}(x^{c-b}-1)=1$$

$x^{b-a}>0$ と積の組合せを考えて，

$$x^{b-a}=1 \text{ かつ } x^{c-b}-1=1$$

$b-a>0$ より $x=1$ となるが，これは $x^{c-b}=2$ と矛盾する。

よって，①は成り立たない。 (証明おわり)