数チャレ 第71回(2006年12月)

kを正の偶数(定数)とする。

$$x^2+y^2+z^2=kxyz$$

を満たす正の整数$x,\ y,\ z$は存在しないことを証明せよ。

解答

$$x^2+y^2+z^2=kxyz \quad (k\text{は正の偶数}) \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす正の整数$x,\ y,\ z$が存在すると仮定して矛盾を導く。

$kxyz$は偶数であるから，

$x,\ y,\ z$は3つとも偶数，または1つだけが偶数

である。$x,\ y,\ z$の最大公約数が2でちょうどn回$(n \geqq 0)$割れるとして

$$x=2^n u,\ y=2^n v,\ z=2^n w \quad (u,\ v,\ w\text{は正の整数}) \qquad \cdots\cdots ②$$

と表すことができる。ここで，

$u,\ v,\ w$の少なくとも1つは奇数

である。

①，② より

$$u^2+v^2+w^2=2^n kuvw \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立ち，この右辺は偶数であるから

$u,\ v,\ w$のうち2つは奇数，1つは偶数

となるが，$u,\ v,\ w$についての対称性より

$u,\ v$は奇数，wは偶数

として一般性を失わない。

すると，w^2およびkwは4の倍数であるから，③より

u^2+v^2は4の倍数

となるが，$u,\ v$は奇数であるから

$$u=2s+1,\quad v=2t+1 \quad (s,\ t\text{は整数})$$

と表されて，

$$u^2+v^2=4(s^2+s+t^2+t)+2$$

は4の倍数とはならないから矛盾である。

以上より，①を満たす正の整数$x,\ y,\ z$は存在しない。

(証明おわり)