数チャレ 第72回(2007年1月)

x 以下の最大整数(x の整数部分)を $[x]$ で表すとき,

$$N=\left[\frac{19}{2007}\right]+\left[\frac{19}{2007}\times 2\right]+\left[\frac{19}{2007}\times 3\right]+\cdots+\left[\frac{19}{2007}\times 2006\right]$$

の値を求めよ。

解答

$\left[\dfrac{19}{2007}k\right]$ は,$0<y\leqq\dfrac{19}{2007}k$ を満たす整数 y の個数を表すから,

N は $0<x<2007,\ 0<y\leqq\dfrac{19}{2007}x$ を満たす格子点 $(x,\ y)$ の個数

と一致する。

19 と 2007 は互いに素であることより,点 $(0,\ 0)$ と点 $(2007,\ 19)$ を結ぶ線分上には両端を除いて格子点は存在しないから,

N は $0<x<2007,\ 0<y<19$ を満たす格子点 $(x,\ y)$ の個数の半分

である。

よって,求める値は

$$N=\frac{2006\times 18}{2}=18054 \quad (答)$$