数チャレ 第73回(2007年2月)

$\cos 1^\circ$ は有理数か。

解答

まず，自然数 n に対して，ある整数係数多項式 $P_n(x)$ が存在して

$$\cos n\theta = P_n(\cos\theta)$$

と表されることを，n についての数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき，$P_1(x)=x$ とすると

$$\cos\theta = P_1(\cos\theta)$$

(ii) $n=2$ のとき，$P_2(x)=2x^2-1$ とすると，2倍角の公式より

$$\cos 2\theta = P_2(\cos\theta)$$

(iii) 整数係数多項式 $P_{k-1}(x)$，$P_k(x)$ が存在して

$$\cos(k-1)\theta = P_{k-1}(\cos\theta),\quad \cos k\theta = P_k(\cos\theta)$$

が成り立つとすれば，加法定理より

$$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2\cos k\theta\cos\theta$$

であるから，

$$P_{k+1}(x) = 2xP_k(x) - P_{k-1}(x)$$

とおくと，$P_{k+1}(x)$ も整数係数多項式であり，

$$\begin{aligned}\cos(k+1)\theta &= 2\cos\theta\cos k\theta - \cos(k-1)\theta\\ &= 2\cos\theta\cdot P_k(\cos\theta) - P_{k-1}(\cos\theta)\\ &= P_{k+1}(\cos\theta)\end{aligned}$$

が成り立つ。

以上(i), (ii), (iii)より，整数係数多項式 $P_n(x)$ により $\cos n\theta = P_n(\cos\theta)$ と表されることが示された。

$\cos 1^\circ$ が有理数であるとすれば，有理数は加減乗除について閉じているから

$$\cos 30^\circ = P_{30}(\cos 1^\circ) \text{ は有理数}$$

となって，

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ は無理数}$$

であることと矛盾する。

よって，

$$\cos 1^\circ \text{ は無理数} \quad \text{(答)}$$

である。

(注) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が無理数であることは，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{m}{n}$ (m，n は正の整数)と仮定すると，素因数分解の一意性に反することから示される。